量子力学I　Homework 4

上田正仁

2010 Jan. 7

問題

1次元調和振動子のSchrödinger方程式のエネルギー固有関数 $\phi_n(x)$ を考える。

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{m\omega^2x^2}{2}\Big]\phi_n(x) \quad = \quad \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\hbar\omega\phi_n(x)$$

(1) 生成消滅演算子 a、$a^\dagger$ を x および p を用いて表せ。

(2) これに線形な外部ポテンシャル

$$V(x) \quad = \quad qEx$$

のかかったときのSchrödinger方程式のエネルギー固有値 E_n' と固有関数 $\phi_n'(x)$ を、$\phi_n(x)$ を用いて表せ。特に新しい固有状態が元の固有状態を並進させただけで得られることを確認せよ。

(3) 次の関係式を証明せよ。(Hint. Taylor展開の係数を比較すると良い。)

$$\exp(\hat{A}x)\hat{B}\exp(-\hat{A}x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}[A,B]_n$$

ただし、$[A,B]_n$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
[A,B]_n &\equiv [A,[A,B]_{n-1}] \quad (n\geq 2)\\
[A,B]_1 &\equiv [A,B]\\
[A,B]_0 &\equiv 1
\end{aligned}$$

(4) $T(y)$ という演算子は、

$$T(y) \quad \equiv \quad \exp\Big(i\frac{\hat{p}y}{\hbar}\Big)$$

のように定義され、**並進演算子 (Translation Operator)** と呼ばれる。次の関係式を導くことで、実際に $T(y)$ が系を y だけ並進させることを確認せよ。

$$\begin{aligned}
T(y)\hat{x}T^\dagger(y) &= \hat{x}+y\\
T(y)\hat{p}T^\dagger(y) &= \hat{p}\\
T(y)f(x) &= f(x+y)
\end{aligned}$$

必要ならば (3) で示した関係式を利用せよ。
(5) $T(y)$ により $\phi_n'(x)$ が次のように、元の固有状態を平行移動させるだけで得られることを確認せよ。

$$|\phi_n' > \quad = \quad T\Big(\frac{qE}{m\omega^2}\Big)|\phi_n >$$

(6) 以下の関係式を証明せよ。

$$T(y) = \exp\Big(-\frac{m\omega}{4\hbar}y^2\Big)\exp\Big(-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}ya^\dagger\Big)\exp\Big(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}ya\Big)$$

必要ならば、次の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を利用せよ。

$$\exp(\hat{A})\exp(\hat{B}) \quad = \quad \exp\Big(\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]+[B,[B,A]])+...\Big)$$

(7) 外場がかかった後の基底状態を、元の固有関数で展開したとき

$$|\phi_0' >= \sum_{n=0}^{\infty} c_n|\phi_n > \tag{1}$$

展開係数 c_n を求めよ。特に確率分布 $|c_n|^2$ が Poisson 分布に従っていることを確認せよ。
(8) $|\phi_0' >$ は消滅演算子 a の固有状態になっていることを確認して、その固有値を求めよ。このような消滅演算子の固有状態のことを**コヒーレント状態 (Coherent state)** と呼ぶ。

Key Point
1. **並進演算子** $T(y)$ は系の並進対称性を議論するときに便利である。実際、任意の演算子 $\hat{A}$ について $\hat{A}' = T(y)\hat{A}T^\dagger(y)$ という変換で演算子の並進変換が表せる。$T(y)$ は固体中のように周期性や並進対称性が重要になる場合によく利用される。
2. Hermite 演算子ではない演算子についても、その固有状態を考えることもできる。特に**消滅演算子は Hermite 演算子ではない**のだが ($a \neq a^\dagger$)、その固有状態は**コヒーレント状態**と呼ばれ、レーザーや超伝導、超流動の状態を記述する時などに広く利用される非常に重要な状態である。