

量子力学I Homework 5

上田正仁

2010 Jan. 18

問題 1

デルタ関数のポテンシャルが存在するときの定常状態の1次元の Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0 \delta(x) \right] \phi(x) = E \phi(x)$$

を考える。

(1) $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$ のときの解は、入射波、反射波、透過波の重ね合わせで

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp(ikx) + B \exp(-ikx) & (x < 0) \\ C \exp(ikx) & (x > 0) \end{cases} \quad (1)$$

と書ける。このときの係数 B 及び C を求めよ。(教科書の問題 1.1 を参考にすると良い)。

(2) 上で求めた B と C について次の関係式が成立することを確かめよ

$$1 = |B|^2 + |C|^2 \quad (2)$$

(3) 上式が、確率の保存則

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (3)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) \equiv \frac{\hbar}{2im} [\phi^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) - \phi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \phi^*(\vec{r}, t)] \quad (4)$$

と等価であることを示せ。また、1、 $|B|^2$ 、 $|C|^2$ それぞれの項の物理的意味を述べよ。

(4) 高エネルギー、および低エネルギーの極限についての透過波、反射波の係数に関する以下の漸近的な振る舞いを確認せよ。

$$\begin{cases} |B|^2 \rightarrow \frac{mV_0^2}{2E\hbar^2} \\ |C|^2 \rightarrow 1 - \frac{mV_0^2}{2E\hbar^2} \end{cases} \quad \left(E \gg \frac{mV_0^2}{\hbar^2} \right) \quad (5)$$

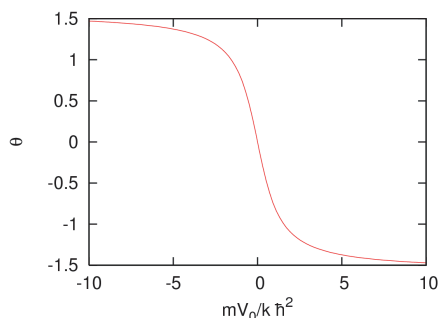
$$\begin{cases} |B|^2 \rightarrow 1 - \frac{2E\hbar^2}{mV_0^2} \\ |C|^2 \rightarrow \frac{2E\hbar^2}{mV_0^2} \end{cases} \quad \left(E \ll \frac{mV_0^2}{\hbar^2} \right) \quad (6)$$

(5) 透過波 $C \exp(ikx)$ は入射波 $\exp(ikx)$ と比べてどれだけの余分な位相を獲得しているか求め、下の図 1 のようになることを確認せよ。この図からわかるように $V_0 > 0$ が斥力の時は負の位相を獲得し、波動関数が”右に押し出され”ており、また逆に V_0 が引力のときは正の位相を獲得しており、波動関数が”左に引き込まれている”。

(6) 今度は、 $E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} < 0$ について、以下の形の解（束縛状態）が存在するかについて考える。

$$\phi(x) = \begin{cases} F \exp(\kappa x) & (x < 0) \\ G \exp(-\kappa x) & (x > 0) \end{cases} \quad (7)$$

解の接続から、束縛状態のエネルギー、およびそれが存在する V_0 の条件を求めよ。



Key Point

1. 式 (6) からわかるように、エネルギーがポテンシャル障壁より十分小さいときでも透過波は存在している。これがトンネル効果である。また反対にエネルギーが十分大きい時にでも、透過波が 100 % ではなく、有限の反射波が存在する。
2. 問題 (5) で求めた入射波と透過波の位相差は位相シフト (Phase Shift) と呼ばれる。この量は、問題で見たように波動関数がどれだけ”引き込まれたか”、”押し出されたか”の情報を含んでおり、波動関数のポテンシャルによる散乱問題を特徴付ける非常に重要な量である。
3. 1次元では通常引力ポテンシャルの場合、無限小の引力でも束縛状態が存在し、引力を強くするにつれて束縛状態の個数は増加していく。(余裕があれば確認せよ)。しかし、問題 (6) のようにデルタ関数型のポテンシャルについては、無限に深くても束縛状態は 1 つだけである。上記の束縛状態の個数や存在条件は、次元を変えると実は変化する。