

量子力学I Homework

上田正仁

2009 Dec. 14

1次元 Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \phi(x) = E\phi(x) \quad (1)$$

について以下の階段状ポテンシャルでの波動関数を求めることを考える。(特に教科書の問題 1.1 にある解の接続条件が参考になる。)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2)$$

問題 1 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > V$ のときの解について。

$x < 0$ から波動関数が入射してくる場合を考える。このとき、波動関数は入射波、反射波、透過波からなり、波動関数はそれらの線形結合

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < 0) \\ Ce^{ipx} & (x \geq 0) \end{cases} \quad (3)$$

で表される。このときの透過波の波数 p を E と V を用いて表せ。また係数 B および C を p と k で表せ。

問題 2 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < V$ のときの解について。

このときは $x > 0$ では透過波は進行波としては存在できない。しかし指数的に減衰する解としては存在でき、

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Fe^{-ikx} & (x < 0) \\ Ge^{-\kappa x} & (x \geq 0) \end{cases} \quad (4)$$

と解は表せる。このときの κ を E と V を用いて表せ。また係数 F および G を κ と k で表せ

Key Point

$E < V$ の時に古典的な粒子は完全に反射され透過できないが、量子力学では有限の存在確率でポテンシャルが高い領域に粒子が観測されうる。これをトンネル効果といい、重要な量子力学的効果の1つである。また $E > V$ のときも反射波が存在し、粒子が完全に通過してする古典粒子とは異なる。