2010 Dec. 20

量子力学 I (上田正仁) Homework.3

1 次元空間上の自由電子の運動を量子力学的に考察する. 電子の質量を m とすると, 電子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{1}$$

である. 以下の問いに答えよ.

問題 1 系の初期状態ベクトルを $|\Psi\rangle$ としたとき, 時刻 t における状態ベクトル $|\Psi(t)\rangle$ が

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)|\Psi\rangle \tag{2}$$

となることを説明せよ. ただし

$$\exp\left(\hat{A}\right) \equiv \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\hat{A}^N \tag{3}$$

である.

問題 2 系の初期状態ベクトルが座標基底で

$$\langle x|\Psi\rangle = \delta(x - x_0) \tag{4}$$

という場合を考える. つまり $t = 0$ で電子の波動関数が $x = x_0$ に局在している場合を考える. このとき

$$|\Psi\rangle = |x_0\rangle \tag{5}$$

であることを示せ.

問題 3 時刻 t における状態ベクトル (2) を求めたい. しかし $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ という演算子の $|x_0\rangle$ への作用は複雑なので別の基底へ移るのが賢明である. 運動量演算子 $\hat{p}$ の固有状態から成る基底 $\{|p\rangle\}$ $(\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle)$ は

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)|p\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t\right)|p\rangle \tag{6}$$

を満たすことを示せ.

問題 4 完全性条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\,|p\rangle\langle p| = I \tag{7}$$

を利用して式 (2) の右辺を基底 $\{|p\rangle\}$ で表せ. なお, $\langle p|x_0\rangle$ を用いて良い.

問題 5 2 つの基底 $|x\rangle, |p\rangle$ をつなぐ変換関数 (変換行列) が

$$\langle x|p\rangle = \langle p|x\rangle^* = \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right) \tag{8}$$

であることを利用して, 式 (2) の右辺を基底 $\{|x\rangle\}$ で表せ.

問題 6 粒子が時刻 t で区間 $[x, x + dx]$ に見出される確率は $|\langle x|\Psi(t)\rangle|^2 dx$ である. $|\langle x|\Psi(t)\rangle|^2$ を求めよ.

Key Point 粒子の状態はヒルベルト空間上のベクトルとして表され, 状態の時間発展は線形演算子 $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ を掛けることで表される. 状態を指定するのに便利な基底は必ずしも時間発展演算子を対角化しないため, この掛け算は一旦ハミルトニアンの固有状態から成る基底に移ってから行い, そのあとでもとの基底に戻るという手続きで実行するのが良い.