2011 Jan. 17

量子力学 I (上田正仁) Homework.6

一次元系における一般のポテンシャル障壁に対する透過率を求めることを考える. 高さが V_0, 幅が $2a$ のポテンシャル障壁:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

にエネルギー E ($E < V_0$) を持った粒子が $x = -\infty$ から入射するとき透過率 T は

$$T = \left[1 + \left(\frac{k^2+\kappa^2}{2k\kappa}\right)^2 \sinh^2(2\kappa a)\right]^{-1} \tag{2}$$

となる (教科書 p.47). ただし, $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar$ および $\kappa \equiv \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$ である.

一般のポテンシャル障壁に対する透過率も適当な境界条件を課してシュレーディンガー方程式を解けば同様に求まるが, 実際的には厳密解を求めることは容易ではない. しかし矩形のポテンシャル障壁に対する結果を応用すればこれを近似的に求めることができる. この問題では簡単のためポテンシャル障壁は上に凸で $V(x) = E$ を満たす x は a, b の 2 つ ($a < b$) とする.

問題 1 ポテンシャル障壁が厚く $\kappa a \gg 1$ が成り立つとき式 (2) は

$$T \sim \left(\frac{4k\kappa}{k^2+\kappa^2}\right)^2 \exp(-4\kappa a) \tag{3}$$

と書けることを示せ.

問題 2 ポテンシャル障壁の $a < x < b$ の部分を N 分割し, 矩形に近似的に置き換える. すなわち, $x_i \equiv a + i\Delta x$ ($i = 0, 1, \ldots, N, \Delta x \equiv (b-a)/N$) とし $x_i < x < x_{i+1}$ のとき $V(x) = V(x_i)$ ($i = 0, 1, \ldots, N-1$) とする. i 番目の矩形 ($i = 0, 1, \ldots N-1$) での透過率を求めよ.

問題 3 全体の透過率は各矩形の透過率の積だとしてよい. また, 式 (3) の 1 番目の因子 $\left(\frac{4k\kappa}{k^2+\kappa^2}\right)^2$ は 2 番目の因子 $\exp(-4\kappa a)$ に比べて重要でないので 1 に置き換えてよい. これらの事実を用いて, 全体の透過率が

$$T_{\text{total}} \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b dx \sqrt{2m(V(x)-E)}\right) \tag{4}$$

と書けることを示せ.

問題 4 トンネル効果は α 崩壊を説明する. α 崩壊は強い核力で原子核に束縛された α 粒子がトンネル効果によって原子核の外に飛び出す現象である. 出てくる α 粒子の運動エネルギーは原子核による束縛エネルギーの 1/10 程度なのでこの現象は古典力学では説明出来ないことに注意せよ. α 粒子が感じるポテンシャルとして次の簡単なモデルを採用する:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 2Ze^2/r & r > R. \end{cases} \tag{5}$$

(Z は崩壊後の原子核の電荷.) α 粒子ははじめ $r < R$ の核内に束縛され, エネルギー E を持っているとし, $r > R$ へとポテンシャル障壁を透過する確率を式 (4) を用いて求めよ.

問題 5　問題 4 で求めた透過率は核内で運動している α 粒子が $r = R$ のところにあるポテンシャルの壁 ((5) 式を見よ) に 1 回衝突するごとにトンネルできる透過確率である. 核内に束縛された α 粒子は, 速さ v で古典的に運動しているものとして α 崩壊の平均寿命 τ を求めよ.

Key Point　量子力学のトンネル効果における透過率を近似的に求める公式 (4) は**ガモフの透過因子**として知られている. より正確な導出は WKB 近似という方法で行うのが一般的だが, 得られる結果は同じである. α 崩壊はトンネル効果によって起こる量子力学的な現象である.