量子力学 I 演習問題 No.1 　　2011. 11. 28

Galilei 変換

Schrödinger 方程式

$$\frac{-\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial^2 x}+V(x)\psi(x,t)=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \tag{1}$$

が Galilei 変換

$$x=x'+vt', \quad t=t' \tag{2}$$

のもとで不変であるとき, 波動関数がどのように変換されるかを考えてみよう. 座標が (x,t) で与えられる系を A 系とし, 座標が (x',t') で与えられる系を A' 系とする. ここでポテンシャルは A 系では $V(x)$ で, A' 系では $V'(x')$ で与えられ,

$$V(x)=V'(x') \tag{3}$$

を満たすとする.

1. A' 系での波動関数を $\psi'(x',t')$ として, A' 系での Schrödinger 方程式を書き下せ.

2. 確率密度は物理量なので, 座標系には依存しない. よって適当な A' 系の座標 a',b' とそれに対応する A 系の座標 $a=a'+vt', b=b'+vt'$ に対して

$$\int_a^b|\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x=\int_{a'}^{b'}|\psi'(x',t')|^2\,\mathrm{d}x' \tag{4}$$

が成り立つ. (4) 式より

$$|\psi(x,t)|^2=|\psi'(x',t')|^2 \tag{5}$$

がほとんどすべての点で成り立つことを示せ. また, この際次の関係式が成り立つことに注意せよ

$$\psi'(x',t')=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(x,t)}\psi(x,t) \tag{6}$$

ただし $f(x,t)$ は実関数.

3. $\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}$ となることを確かめよ.

4. 問 2 と問 3 で求めた関係式を A' 系の Schrödinger 方程式に代入し, A 系と A' 系での Schrödinger 方程式が等しくなるための $f(x,t)$ に関する微分方程式を求めよ.

5. 実際に問 4 で与えられた f に関する微分方程式を解くことで,

$$f(x,t)=\frac{1}{\hbar}\left(Mvx-\frac{1}{2}Mv^2t\right) \tag{7}$$

となることを確かめよ. ここで, 積分定数は波動関数の位相の自由度により吸収できるので 0 とできることに注意せよ.

6. 特に $V=V'=0$ のとき, $\psi'(x',t')$ は自由波で与えられる. つまり,

$$\psi'(x',t')=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx'-\frac{\hbar k^2}{2M}t')} \tag{8}$$

となる. ここで k は波数である. これを示せ.

7. $V=V'=0$ のとき, 問 5 で得られた $\psi'(x',t')$ と $\psi(x,t)$ の関係式が実際に運動量の Galilei 変換 $\hbar k\to\hbar k+Mv$ と整合していることを確認せよ. つまり, $\psi'(x',t')$ が式 (8) で与えられるとき $\psi(x,t)$ が

$$\psi(x,t)=\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hbar k+Mv)x-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{(\hbar k+Mv)^2}{2M}t\right] \tag{9}$$

となることを示せ.