量子力学 I 演習問題 No.3　　2011. 12. 12

運動量表示

考えている系が空間並進に対して不変の時は, 座標よりも運動量を対角化する基底を選ぶ方が便利であることが多い. ここではその例として一次元での自由粒子の時間発展を考えてみる.

Schrödinger 方程式は

$$\frac{\hat{P}^2}{2M}\left|\psi(t)\right\rangle = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle \tag{1}$$

で与えられる. ここで座標を対角化した基底を

$$\Psi(x,t) \equiv \left\langle x \right| \psi(t) \rangle \tag{2}$$

運動量を対角化した基底を

$$\Phi(k,t) \equiv \sqrt{\hbar}\left\langle \hbar k \right| \psi(t) \rangle \tag{3}$$

と書く. ここで係数 $\sqrt{\hbar}$ は便宜上付け加えた.

1. 運動量基底 (3) での Schrödinger 方程式 (1) を書き下せ.

2. 1. で求めた Schrödinger 方程式を t について解け. ただし, $t=0$ での初期状態を $\left|\Psi(0)\right\rangle$ とする.

3.

$$\left\langle x \middle| \hat{P} \middle| \hbar k \right\rangle = \hbar k \left\langle x \right| \hbar k \rangle = -\mathrm{i}\hbar\partial_x \left\langle x \right| \hbar k \rangle \tag{4}$$

を示せ. また, この関係式より

$$\left\langle x \right| \hbar k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{5}$$

が成り立つことを示せ.

4. 完全性関係 $I = \int \mathrm{d}k \left|\hbar k\right\rangle\left\langle \hbar k\right|$ を用いると $\Psi(x,t) = \left\langle x \right| \psi(t)\rangle = \left\langle x \right| I \left| \psi(t)\right\rangle$ と書けることに注意して, $\Psi(x,t)$ を $\Phi(k,0)$ で表せ.

5. 初期状態として Gaussian

$$\Psi(x,0) = \left(2\pi a^2\right)^{-\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}} \tag{6}$$

をとる. この初期状態は運動量表示で

$$\Phi(k,0) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-a^2k^2} \tag{7}$$

と表されることを示せ. また, 積分を実行して $\Psi(x,t)$ を求めよ.