量子力学 I 演習問題 No.4　　2011. 12. 19

Squeezed 状態

1.　$f(x)=\mathrm{e}^{x\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-x\hat{A}}$ と定義する．この演算子 $f(x)$ をパラメーター x について展開することを考える:

$$f(x)=f(0)+x\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}+\frac{x^2}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}^2 x}\right|_{x=0}+\cdots \tag{1}$$

このとき $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}^2 x}$ を求めよ．また (1) より

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\hat{A}}=\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{2}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{[\hat{A},[\hat{A},[\cdots,[\hat{A}}_{\hat{A}\text{が n 個}},\hat{B}]]]] \tag{2}$$

が成り立つことを確認せよ．

2.　位相空間での移動演算子 $\hat{D}(x_0,p_0)$ を以下のように定義する．

$$\hat{D}(x_0,p_0)\equiv\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(p_0\hat{X}-x_0\hat{P}\right)\right\} \tag{3}$$

このとき (2) を用いて

$$\hat{D}(x_0,p_0)\hat{X}\hat{D}(x_0,p_0)^\dagger=\hat{X}-x_0\hat{I} \tag{4}$$
$$\hat{D}(x_0,p_0)\hat{P}\hat{D}(x_0,p_0)^\dagger=\hat{P}-p_0\hat{I} \tag{5}$$

を示せ．ここで $\hat{I}$ は単位演算子である．

3.　Squeezed 演算子を

$$\hat{S}(r)\equiv\exp\left\{\frac{\mathrm{i}r}{2\hbar}\left(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}\right)\right\} \tag{6}$$

で定義する．ここで r は実のパラメーターである．このとき (2) を用いて

$$\hat{S}(r)\hat{X}\hat{S}^\dagger(r)=\mathrm{e}^{r}\hat{X} \tag{7}$$
$$\hat{S}(r)\hat{P}\hat{S}^\dagger(r)=\mathrm{e}^{-r}\hat{P} \tag{8}$$

を示せ．

3.　調和振動子の基底状態

$$\Psi_0(x)=\langle x|\,\Psi_0\rangle=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \tag{9}$$

に対して Squeezed 状態を

$$|s\rangle\equiv\hat{S}(r)\hat{D}(x_0,p_0)\,|\Psi_0\rangle \tag{10}$$

で定義する．このとき $\left\langle s\left|\hat{X}\right|s\right\rangle, \left\langle s\left|\hat{P}\right|s\right\rangle, \Delta\hat{X}, \Delta\hat{P}$ を計算せよ．