量子力学 I 演習問題 No.5　　2012. 1. 16

時間に依存する調和振動子

1.　時間依存性を演算子の時間変化で記述する表示を Heisenberg 表示という．この表示の元で演算子 $\hat{O}$ の時間変化は Heisenberg 方程式で与えられる:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{O}(t) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{O}(t)\right] \tag{1}$$

ここで $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ は交換子である．

　ここで Hamiltonian が

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)}{2}\hat{X}^2 \tag{2}$$

で与えられる, 振動数が時間に依存する一次元調和振動子を考える．このとき (1) 式の演算子 $\hat{O}$ として, 位置演算子 $\hat{X}$ 及び運動量演算子 $\hat{P}$ を代入し, それぞれの演算子に対応する Heisenberg 方程式を書き下せ．また, 二つの方程式を連立することで位置演算子のみに関する微分方程式を求めよ．

2.　ある時刻 (例えば $t = 0$) での位置演算子は生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ と消滅演算子 $\hat{a}$ を用いて

$$\hat{X}(0) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega(0)}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right) \tag{3}$$

のように分解できる．時刻 t での位置演算子を

$$\hat{X}(t) = f(t)\hat{a} + \bar{f}(t)\hat{a}^\dagger \tag{4}$$

と表すとモード関数 $f(t)$ は以下の関係式を満たすことを示せ．ただし $\bar{f}(t)$ は $f(t)$ の複素共役であることに注意せよ．

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}^2 t} + \omega^2(t) f(t) = 0 \tag{5}$$

$$\langle f, f\rangle = 1 \tag{6}$$

ここで

$$\langle f, g\rangle \equiv \frac{\mathrm{i}m}{\hbar}\left(\bar{f}\partial_t g - \left(\partial_t \bar{f}\right) g\right) \tag{7}$$

は Klein-Gordon 内積である．

3.　$f(t), g(t)$ が (5) を満たすとき Klein-Gordon 内積 $\langle f, g\rangle$ は時間に依存しないことを示せ．

4.　ここで振動数が定数, つまり $\omega(t) = \omega$ が成り立つときを考える．このとき

$$f(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{8}$$

で与えられることを確認せよ．ここで

$$\hat{X}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\hat{a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\hat{a}^\dagger\right) \tag{9}$$

となることに注意せよ．

5.　次に $\omega(t)$ が $t \to t_{\rm in} = -\infty$ では $\omega_{\rm in}$ となり, $t \to t_{\rm out} = \infty$ では $\omega_{\rm out}$ となる場合を考える．それぞれの周波数に対応するモード関数を

$$f_{\rm in}(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{\rm in}}} {\rm e}^{-{\rm i}\omega_{\rm in}t}, \qquad f_{\rm out}(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{\rm out}}} {\rm e}^{-{\rm i}\omega_{\rm out}t} \tag{10}$$

で定義する．また, それぞれの周波数で定義される生成, 消滅演算子 $\hat{a}_{\rm in,out}, \hat{a}^\dagger_{\rm in,out}$ を用いると位置演算子は

$$\hat{X}(t) = f_{\rm in}(t)\hat{a}_{\rm in} + \bar{f}_{\rm in}(t)\hat{a}^\dagger_{\rm in} = f_{\rm out}(t)\hat{a}_{\rm out} + \bar{f}_{\rm out}(t)\hat{a}^\dagger_{\rm out} \tag{11}$$

と二通りに展開される．$f_{\rm in}(t)$ と $f_{\rm out}(t)$ は線形変換 (Bogoluibov 変換) の関係にあるので, 適当な係数 α, β を用いて

$$f_{\rm out} = \alpha f_{\rm in} + \beta \bar{f}_{\rm in} \tag{12}$$

と表すことができる．ここで α と β は

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \tag{13}$$

を満たすことを示せ．また, $\hat{a}_{\rm in,out}\left|0_{\rm in,out}\right\rangle = 0$ で初期状態 $(t = -\infty)$ と終状態 $(t = \infty)$ での真空を定義すると,

$$\left\langle 0_{\rm in} \middle| \hat{N}_{\rm out} \middle| 0_{\rm in} \right\rangle = \left\langle 0_{\rm in} \middle| \hat{a}^\dagger_{\rm out}\hat{a}_{\rm out} \middle| 0_{\rm in} \right\rangle = |\beta|^2 \tag{14}$$

となることを示せ.

6.　ここでは初期状態として $\omega_{\rm in}$ の周波数だった系が $t = 0$ で突然周波数が $\omega_{\rm out} = 4\omega_{\rm in}$ に変化する場合を考える．$t = 0$ で

$$f_{\rm in}(0) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{\rm in}}}, \qquad f_{\rm out}(0) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{\rm out}}} \tag{15}$$

が成り立つと近似する．このとき α, β を求め, (14) に代入せよ．また (14) の結果の物理的意味を考えよ.