量子力学 I 演習問題 No.6　　2012. 1. 23

トンネリング

一次元の Schrödinger 方程式

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\ \psi(x) + (E - V(x))\ \psi(x) = 0, \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{1}$$

においてポテンシャル障壁

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \le -a \\ V_0 & -a \le x \le a \\ 0 & a \le x \end{cases} \tag{2}$$

にエネルギー $E(E < V_0)$ を持った粒子が $x = -\infty$ から入射するときトンネル確率 T は

$$T = \left[1 + \left(\frac{k^2 + \kappa^2}{2k\kappa}\right)^2 \sinh^2(2\kappa a)\right] \tag{3}$$

となる（教科書の式 (1.211) 参照). ただし, $\kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}$ である.

一般のポテンシャル障壁に対する透過率も適当な境界条件を課してシュレーディンガー方程式を解けば同様に求まるが, 実際的には厳密解を求めることは容易ではない. しかし矩形のポテンシャル障壁に対する結果を応用すればこれを近似的に求めることができる. この問題では簡単のためポテンシャル障壁は上に凸で $V(x) = E$ を満たす x は a, b の 2 つ $(a < b)$ とする.

1.　ポテンシャル障壁が厚く $\kappa a \gg 1$ が成り立つとき式 (3) は

$$T \simeq \left(\frac{4k\kappa}{k^2 + \kappa^2}\right)^2 \mathrm{e}^{-4\kappa a} \tag{4}$$

と書けることを示せ.

2.　ポテンシャル障壁の $a < x < b$ の部分を N 分割し, 矩形に近似的に置き換える. すなわち, $x_i \equiv a + i\Delta x (i = 0, 1, ..., N, \Delta x \equiv (b-a)/N)$ とし $x_i < x < x_{i+1}$ のとき $V(x) = V(x_i) (i = 0, 1, ..., N-1)$ とする. i 番目の矩形 $(i = 0, 1, ..., N-1)$ での透過率を求めよ.

3.　全体の透過率は各矩形の透過率の積だとしてよい. また, 式 (3) の 1 番目の因子 $\left(\frac{4k\kappa}{k^2+\kappa^2}\right)^2$ は 2 番目の因子 $\exp(-4\kappa a)$ に比べて重要でないので 1 に置き換えてよい. これらの事実を用いて, 全体の透過率が

$$T \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \mathrm{d}x \sqrt{2m(V(x) - E)}\right) \tag{5}$$

と書けることを示せ.

4.　金属中の電子が電場からエネルギーをもらって表面から真空中に飛び出るには, ポテンシャル

$$V(x) - E = W - eE_x x \tag{6}$$

の障壁を透過する必要がある. ただし, W は仕事関数で金属中の電子を真空中に取り出すために必要な最小のエネルギーである. また, E_x は x 方向にかかっている電場である. 電子がポテンシャル障壁を透過する確率を式 (5) を用いて求めよ.