

量子光学講義ノート

上田正仁

2023 年 4 月 7 日

2022 年度のノーベル物理学賞はベルの不等式の破れと量子情報科学の基礎物理を開拓した 3 人の研究者に与えられたが、ここでは光子のエンタングルメントなど量子光学が基礎となっている。本講義では量子光学の現代的な入門を行う。また、それが現在の量子情報処理にどのようにつながっているかについて講義する。

この講義ノートを作成する際に次の書籍を参考にした。

- 上田正仁 「現代量子物理学」 (培風館 2004)
- 上田正仁 量子力学 II 講義ノート (上田研ホームページ lecture 欄からダウンロード可)
- 沙川貴大、上田正仁 「量子測定と量子制御」 (サイエンス社) .
- ランダウ=リフシッツ 「量子力学」 (ちくま学芸文庫 2008)

目次

第 1 章	量子力学の基礎	5
第 2 章	不確定性関係	11
第 3 章	量子測定理論	21
第 4 章	電磁場の量子化	31
第 5 章	量子光学の典型的な量子状態	43
第 6 章	量子干渉効果	55
第 7 章	量子情報の消去とコヒーレンス	57
第 8 章	原子と光の相互作用	59
第 9 章	アインシュタインーポドロスキーローゼン相関	61
第 10 章	自然放出のワイスコップーウィグナー理論	63
第 11 章	共振器量子電気力学	65
第 12 章	クローン禁止定理、ベルの不等式	67
第 13 章	量子テレポーテーション	69
第 14 章	量子アルゴリズム	71
第 15 章	量子暗号	73
索引		74

第 1 章

量子力学の基礎

量子光学は、2022 年度ノーベル物理学賞の受賞対象となったクラウザーやアスぺによるベルの不等式の破れの実験など、量子力学の不思議な性質を直接的に検証する実験を可能にしている。これらを深く理解するための準備として、本章では量子力学の基礎の復習をしよう。

1.1 量子力学の特異性

1.1.1 精密科学でありながら本質的理解が困難な量子力学

量子力学は原子・電子・光子などが持つ共通の性質である粒子性と波動性を統一的に記述する学問体系である。しかし、統一の代償として物理的実在、すなわち、物質は我々が観測する・しないに関わらず存在するという素朴実在論を放棄しなければならない。このことは我々が日常生活で前提としているマクロな世界の物質観と鋭く対立する。このミクロとマクロな世界観の相克は量子論の創始者たちを悩まし続けた。ここでは、アインシュタイン、ファインマン、ゲルマンが量子力学についてどのように考えていたかを紹介する。

Quantum mechanics is certainly imposing. But an inner voice tells me that it is not yet the real thing. ... I, at any rate, am convinced that He does not throw dice. (A. Einstein. Letter to Max Born, 1926)

I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics. (R. Feynman)

Quantum mechanics, that mysterious, confusing discipline, which none of us really understands but which we know how to use. (M. Gell-mann)

我々は量子力学の計算法は知っているがなぜそれが正しい答えを与えてくれるのかは十分には理解していないのである。ここに量子力学の直感に反する予言を実験的に検証できる量子光学のファンダメンタル物理の観点からの意義が存在する。

量子力学は、アインシュタインなどの創始者を悩ませた不可思議な性質を有するが、これは量子力学があやふやな学問であるという意味では決してない。それどころか、量子力学は最も正確な定量的予言を可能にしてくれる精密科学であり、その理論体系には操作論的観点からのあいまいさはほとんどない。そのような理論は、普通は初めは難解でも慣れれば簡単に思えてくるものである。相対性理論はその典型例である。しかし、量子力学の予言は実験で実証されても不思議さは消えない。言わば、解釈を拒絶した自然の奥深い神秘を垣間見るような不思議な気持ちになる。

1.1.2 量子力学は力学過程と測定過程の2部構成

ある理論を一般化してできた理論は、通常はそれ自身で論理的に完結したものであり、一般化する前の特殊な理論の助けを借りることなく理論を構築できる。例えば、一般相対性理論は特殊相対性理論を含むが、前者を構成するにあたって後者の助けを必要としない。

量子力学の場合、シュレーディンガー方程式でプランク定数をゼロとする極限をとると古典力学が得られる。しかし、出力が古典的（すなわち、重ね合わせの原理が成立しない）確率変数で与えられる古典的測定器の助けを借りることなく測定のプロセスを記述することができない。この問題は観測の問題と呼ばれ、これまで提案されてきた様々な解釈（コペンハーゲン解釈、多世界解釈）のうちのどれが正しいのかという論争は今日に至るまで決着がついていない。ただし、解釈の問題は量子力学を使って様々な物理量を計算する上でのあいまいさは生じない。実際、量子力学は最も精密な予言を可能にする精密科学である（微細構造定数の測定精度は12桁）。その一方で、波束がどの時点で、また、どうして収縮して古典的な測定値を生み出すのかという問題は未解決のまま残っている。数学的な観点から言うと、量子力学はユニタリーな時間発展によって記述される力学的な部分と非ユニタリーな時間変化をする測定過程の2部構成になっている。

1.1.3 過去・現在・未来

古典力学では、測定の精度とその反作用を独立に決めることができる。このような考え方の背後には、測定対象が測定過程とは独立に存在するという暗黙の仮定が存在している。しかしながら、量子力学では、後に述べる不確定性関係のために測定の精度を決めると、その反作用を任意に小さくすることができない。このことから、知りたい系の性質は、測定過程の詳細に依存するものと結論できる。量子論においては、測定対象が観測者と独立に存在できるという古典的世界観を放棄しなければならない。

古典力学では、ある時刻においてすべての粒子の位置と速度を指定すれば、それ以後の系の振る舞いを完全に予言できる。フランスの数学者ラプラスはこの状況を次のように述べた。もしもある瞬間における全ての物質の力学的状態と力を知ることができ、かつ、もしもそれらのデータを解析できるだけの能力を有する知性が存在するとすれば、この知性

にとっては、不確実なことは何もうなくなり、その目には未来も（過去同様に）全て見えているであろう（ラプラス『確率の解析的理論』1812年）。そのような万能な「知性」は、ラプラスの悪魔と呼ばれている。このように古典論的世界においては、過去と未来が1対1で結びついており、「悪魔」にとってはすべてがお見通しであり、力学が神にとって代わることができる。ここでは、時間は決定論的に変化する事象の系列を順序づけるパラメータに過ぎない。言い換えれば、時間軸上において「現在」は何ら特別ではない。

しかし、量子論においては位置と速度を同時に正確に知ることはできない。従って、未来の予測は古典論に比べてより不確実なものになる。例えば、すべての粒子の位置のある時刻に完全に決定すれば、その直後の運動量は全く不確定になる。このように、ある一組の物理量を完全に決めると、その組に含まれる物理量の関数以外のいかなる物理量も全く不確定になるような物理量の組を物理量の完全な組という。このことは、ある時刻に物理量の完全な組を正確に決定すると、それ以降の系の時間発展はそれ以前の系の状態とは無関係に決まることを意味する。このように、量子論においては、系を観測した時刻「現在」を中心として、未来と過去で質的に異なった役割を果たすのである。過去に対しては、量子力学が予言した確率分布を測定で確認することができる。未来に対しては、測定過程によって全く新しい状態を作り出される。

1.2 状態ベクトルと物理量

1.2.1 状態ベクトル

系の状態は、ヒルベルト空間の状態ベクトル (state vector, ket $|\psi\rangle$) によって記述される。位相因子 $e^{i\theta}$ (θ は実数) だけ異なる状態 ($|\psi\rangle$ と $e^{i\theta}|\psi\rangle$) は物理的に同等であり、同じ射線 (ray) に属するという。しかし、異なった状態を重ね合わせる時の位相差は物理的に意味があり、干渉効果を生む。

1.2.2 物理量（オブザーバブル）

量子力学における物理量は状態に作用するエルミート演算子である。ここで、演算子 $\hat{O}$ のエルミート共役な演算子 $\hat{O}^\dagger$ の行列要素は

$$\langle\phi|\hat{O}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\phi\rangle^* \quad (1.1)$$

で定義される（転置して複素共役をとる）。

演算子は $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$ を満足するときエルミート共役であるといわれる。このとき

$$\langle\phi|\hat{O}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\phi\rangle^* = \langle\phi|\hat{O}|\psi\rangle \quad (1.2)$$

となる。特に、対角要素 $\phi = \psi$ は実数になる。演算子がエルミートであることを要請すると、それに対応する物理量の期待値は実数になる^{*1}。

^{*1} エルミート性は物理量の期待値が常に実数であるための十分条件であるが必要条件ではないことに注意し

数学的な注釈： $\hat{O}$ の定義域 $D(\hat{O})$ と $\hat{O}^\dagger$ の定義域 $D(\hat{O}^\dagger)$ は、作用素が有界の場合は一致するが、非有界な場合は一般には一致しない。条件

$$\langle \hat{O}\phi | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{O}\psi \rangle \quad (1.3)$$

を満足する演算子 $\hat{O}$ をエルミート演算子という。エルミート演算子のうち、 $\hat{O}^\dagger$ が定義でき、かつ、 $D(\hat{O}) = D(\hat{O}^\dagger)$ のものを自己共役（あるいは自己随伴）演算子という。作用素が有界な場合は、定義域はヒルベルト空間全体に取ることができるので、自己共役演算子とエルミート演算子は一致する。しかし、非有界の場合は、自己共役演算子はエルミート演算子であるが逆は真ではない。なぜなら、エルミート性は演算子だけの性質であり、それが作用する定義域に関する条件は課されないからである。

エルミート演算子是对角化可能で固有値は実数とよく言われるが、実際には演算子が対角化（すなわち、スペクトル分解）できることを保証するのは自己共役性である^{*2}。特に、固有値が離散的な場合は、演算子 $\hat{O}$ が自己共役であれば $\hat{O}$ は次のように対角表示で展開できる。

$$\hat{O} = \sum_n O_n P_n, \quad P_n = |n\rangle\langle n| \quad (1.4)$$

P_n は射影演算子と呼ばれ、 $P_n^2 = P_n$ を満足する自己共役演算子として定義される。

1.3 重ね合わせの原理

重ね合わせの原理は、次の 2 つのことを主張する。

- 波動関数 Ψ_1 と Ψ_2 がシュレーディンガー方程式の 2 つの解とすると、それらの線形結合 $\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$ も解である。ここで、 a, b は一般に複素数の定数である。
- 状態 Ψ_1 と Ψ_2 の時間発展がそれぞれ $\Psi_1(t)$ と $\Psi_2(t)$ で与えられるとすると、状態 $\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$ の時間発展は、 $\Psi(t) = a\Psi_1(t) + b\Psi_2(t)$ で与えられる。

重ね合わせの原理から、波動関数 Ψ が従う基礎方程式は Ψ について線形でなければならないことが分かる。

重ね合わせが禁止される場合がある（超選択則）。原子数や電荷が異なる状態の重ね合わせの状態は存在しない。これはバリオン数や電荷が保存されるからである。バリオン数は大統一理論ではスファレロン過程で破れるが、電荷はゲージ理論を信じる限り厳密に保存される。超伝導の Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) 理論はクーパー対の生成・消滅を通じて電子数保存を破るが、これは BCS 理論が平均場近似をした結果である。

重ね合わせの原理が要求する時間発展線形性は様々な重大な帰結を導く。その 1 つは、量子力学にはカオスが存在しないということである。カオスは初期状態のわずかな変化が

よう。例えば、時間反転とパリティ対称な非エルミートなハミルトニアン固有値は実数となりうる。具体例は、2017 年度量子力学 II の中間試験問題 5 を参照。

*2 例えば、新井朝雄、江沢洋 「量子力学の数学的構造 (1)」(朝倉物理学体系, 1997) を参照。

終状態に大きな変化をもたらす。しかし、量子力学の線形性により、初期状態がわずかに変化しても終状態の変化は指数関数的に増大することはできない。このことを数式で見よう。古典カオス系の場合は2つの軌道 x_1, x_2 の初期位置が $\delta x(0) = x_1(0) - x_2(0)$ だけ変化すると後の時刻の変化は $\delta x(t) = e^{\lambda t} \delta x(0)$ のように指数関数的に増大する。ここで、 $\lambda > 0$ はリアプノフ指数 (Lyapunov exponent) である。一方、量子力学の場合、2つの波動関数の差 $\delta\psi(0) := \psi_1(0) - \psi_2(0)$ は時間 t 後には $\delta\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$ となる。 ψ_1, ψ_2 のノルムが1に規格化されていることから $\delta\psi(t)$ のノルムは指数関数的に増大することはできない。もう一つの重大な帰結は後に述べるクローン禁止定理の証明である。

量子力学の線形性がどれくらいの精度で実験的に成立しているのかは、スピンの際差運動を長時間観測し、スピンの方向と外部磁場のなす角度が時間的に変化するかどうかを調べることで検証できる。量子力学の線形性が破れると、たとえばスピンの際差運動の振動数がスピンの向きと磁場とのなす角度に依存して変化する。しかし、 $^9\text{Be}^+$ を用いた実験によると、そのようなずれは21桁の精度で0である [Steven Weinberg, “Precision Tests of Quantum Mechanics” Phys. Rev. Lett. vol. 62, 485-488 (1989)]。この精度は現在では27桁まで向上している。さらに、量子力学が非線形性を持つと、光速よりも早く通信をすることが可能になる (Christoph Simon, Vladimir Buzek, and Nicolas Gisin, “No-Signaling Condition and Quantum Dynamics”, Phys. Rev. Lett. vol. 87, 170405 (2001))。つまり、量子力学の線形性が破れると、相対論も破れるのである。

1.4 量子もつれ

系が2つの部分 A、B からなり、それぞれの部分が波動関数 $\psi^A(x)$ と $\phi^B(y)$ で完全に記述されていると仮定しよう。この時、全系の状態も完全に決まっており、その波動関数 Ψ^{AB} は

$$\Psi^{AB}(x, y) = \psi^A(x) \phi^B(y) \quad (1.5)$$

のように積の形 (テンソル積) で書ける。しかし、全系の波動関数が決まっている場合には、その部分系は一般には波動関数では記述できない (部分系の密度演算子のみ決まる)。実際、 Ψ^{AB} は一般に

$$\Psi^{AB}(x, y) = \sum_n \psi_n^A(x) \phi_n^B(y) \quad (1.6)$$

のような形に書ける。この式は関数 $\Psi^{AB}(x, y)$ を系 B を記述する完全系 $\{\phi_n^B(y)\}$ で展開した時の展開係数が $\psi_n^A(x)$ であると解釈できる。

以上のように、部分系の間には量子もつれとよばれる古典論には存在しない相関が存在しうる。一般に、(1.5) のように全系の波動関数が部分系の波動関数の直積で書けないとき、エンタングルしている、量子もつれ状態にある、などという。エンタングルしている状態は (1.6) のように複数の直積状態が重ね合わさった状態で表される。

第2章

不確定性関係

2.1 ハイゼンベルグの不確定性関係

運動量演算子 $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ の固有値方程式を考える。

$$\hat{p}\Psi_p(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_p(x) = p\Psi_p(x). \quad (2.1)$$

$\Psi_p(x)$ は固有値 p に対応する固有関数である。この状態 $\Psi_p(x)$ に対して運動量を測定すると必ず測定値 p が得られる。(2.1) を解くと固有関数が平面波

$$\Psi_p(x) = Ce^{\frac{i}{\hbar}px} \quad (2.2)$$

であることがわかる。ここで、 C は定数である。この状態にある粒子が位置 x で見出される確率密度 $|\Psi_p(x)|^2 = |C|^2$ は場所によらず一定である。従って、運動量が確定した状態は位置が全く不確定になる。同様に、位置が確定した状態の運動量は全く不確定である。このように、古典力学と異なり、量子力学では位置と運動量は同時に確定した値をとることができない。

位置と運動量のとりうる値の不確かさを表す量として次のような標準偏差を導入する。

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}, \quad \Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}. \quad (2.3)$$

ここで、記号 $\langle \hat{O} \rangle$ はオブザーバブル $\hat{O}$ の期待値

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \Psi^*(x) \hat{O} \Psi(x) dx \quad (2.4)$$

を表すものとする。 $\Delta x, \Delta p$ を波動関数がガウス型

$$\Psi(x) = \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2d^2}} \quad (2.5)$$

の場合に計算しよう。波動関数 (2.5) は偶関数なので、 $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$ 。また

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{d^2}} dx = \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (\pi d^6)^{\frac{1}{2}} = \frac{d^2}{2} \\ \langle \hat{p}^2 \rangle &= \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2d^2}} \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) e^{-\frac{x^2}{2d^2}} dx = \frac{\hbar^2}{2d^2} \end{aligned}$$

よって

$$\Delta x = \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad \Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}d} \quad (2.6)$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (2.7)$$

が成立することがわかる。

下に示すように、一般に不等式

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.8)$$

が成立する。これを位置と運動量に関する**不確定性関係** (uncertainty relation) と言う。特に、等式が成立する状態を**最小不確定状態** (minimum-uncertainty state) という。ガウス型の波動関数 (2.5) は最小不確定状態の一例となっている。

(2.8) の一般的な証明は次のようになされる。任意の関数 $f(x)$ に $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$ を作用させ $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ を使うと

$$(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})f(x) = \hat{x} \frac{\hbar}{i} \frac{df(x)}{dx} - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}(xf) = \frac{\hbar}{i} \left[x \frac{df}{dx} - \left(x \frac{df}{dx} + f \right) \right] = i\hbar f(x)$$

これが任意の関数 $f(x)$ に対して成立するので、

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad (2.9)$$

が成立する。 $\hbar \rightarrow 0$ なる極限をとると $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$ の差はゼロとなり古典論の結果と一致する。これは、 $\hbar$ をゼロとする極限をとることにより、量子論は古典論へと移行することを意味している^{*1}。位置と運動量の**交換関係** (commutation relation) は、

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.10)$$

と書ける。

さて、位置および運動量のオブザーバブルからその期待値を引いた演算子

$$\Delta \hat{x} \equiv \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle, \quad \Delta \hat{p} \equiv \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle \quad (2.11)$$

とそれらの線形結合で表される演算子

$$\hat{A} \equiv t\Delta \hat{x} - i\Delta \hat{p} \quad (2.12)$$

を定義する。ここで、 t は実数であるとする。このとき、 $\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle \equiv \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = (\Delta x)^2$, $\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle \equiv \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = (\Delta p)^2$ が成立することに注意しよう。 $\langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle$ は非負なので、これに (2.12) を代入すると実数 t に対して次の不等式が成立することがわかる。

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle &= \langle (t\Delta \hat{x} + i\Delta \hat{p})(t\Delta \hat{x} - i\Delta \hat{p}) \rangle = t^2 \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle + it \langle \Delta \hat{p} \Delta \hat{x} - \Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \rangle + \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle \\ &= t^2 \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle + it \langle \hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} \rangle + \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = t^2 (\Delta x)^2 + \hbar t + (\Delta p)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

^{*1} アインシュタイン-ド・ブロイの関係式 $p = \hbar k$ で $\hbar \rightarrow 0$ なる極限をとると p はゼロとなってしまう。正しい極限操作は、 $\hbar$ をゼロとすると同時に k を積 $\hbar k$ を一定に保ちつつ無限大にすることである。これは、波の波長 $\lambda = 2\pi/k$ をゼロとする**幾何光学** (geometrical optics) の極限をとることに対応している。

これが、任意の実数 t で成立するためには、判別式は 0 または負でなければならない。

$$D = \hbar^2 - 4(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \leq 0$$

こうして不確定性関係 (2.8) が証明された。(2.8) はケナード・ロバートソンの不等式と呼ばれる。この証明から明らかなように、ケナード・ロバートソンの不等式は測定過程とは無関係な波動関数の性質を表している。これに対して、ハイゼンベルグの不確定性関係は位置の測定精度とその測定による運動量への擾乱の間に成立する関係式を言う。

2.2 不確定性関係の物理的意味

不等式 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ を実験的に検証する方法を考察することにより、不確定性関係の物理的意味を考察しよう。不等式 (2.8) は、数学的には任意の与えられた波動関数 $\Psi(x)$ に対して位置の標準偏差 Δx を計算し、同じ波動関数に対して運動量の標準偏差 Δp を計算する。すると、両者の積は常に $\hbar/2$ よりも大きくなるという主張である。これは次のようにして実験的に検証できる。

同一の波動関数 Ψ で記述される系を $2N$ 個準備する。まず、その半分の N 個の系のそれぞれに対して位置を正確（すなわち、測定誤差無しで）に測定し、測定結果 $x_1, x_2, \dots, x_N$ が得られたとしよう。これらの測定データから計算された標準偏差を $(\Delta x)_N$ とすると、この量は N が無限大の極限で波動関数を使って計算された標準偏差 Δx に収束する。同様に、残りの半分の N 個の系に対して運動量を測定誤差無しに測定して得られた測定結果 $p_1, p_2, \dots, p_N$ から計算される標準偏差 $(\Delta p)_N$ は、 N が無限大の極限で波動関数から計算された Δp に収束する。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta x)_N = \Delta x, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta p)_N = \Delta p. \quad (2.13)$$

両者の積 $(\Delta x)_N(\Delta p)_N$ は同じ極限で $\hbar/2$ 以上となる。位置や運動量を測定誤差無しに測定しても、毎回測定結果がばらつくのは被測定系の波動関数の広がりである。これが、不確定性関係 (2.8) の物理的意味である。

不確定性関係 (2.8) が被測定系の波動関数の性質のみで決まり、測定過程に依存しないのは、位置と運動量を別々に測定したからである。このことをより深く理解するために次のような測定を考えよう。

系に対してまず位置を誤差なしで測定して測定値 x'_1 が得られたとして、その直後に同じ系に対して引き続き運動量を測定し、測定値 p'_1 が得られたとしよう。同様の操作を同じ波動関数 Ψ で記述される N 個の系に対して実行し、その結果得られる測定データを $x'_1, x'_2, \dots, x'_N, p'_1, p'_2, \dots, p'_N$ とする。そして、これらから計算された位置と運動量の標準偏差をそれぞれ $(\Delta x')_N, (\Delta p')_N$ と書こう。このとき、 N が無限大の極限で前者は波動関数 Ψ から計算された位置の標準偏差 Δx に収束するが、後者は同じ Ψ を用いて計算された運動量の標準偏差 Δp には収束しない。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta x')_N = \Delta x, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta p')_N \neq \Delta p \quad (2.14)$$

その理由は、位置を測定した後の波動関数は測定の反作用を受けるために、 Ψ とは異なった状態になっているからである。実際、位置を誤差なしで測定した直後の状態の運動量の不確定性は無限大になっているはずである。一般に、誤差なしでない測定をした場合も含めて、不確定積 $(\Delta x')_N(\Delta p')_N$ が $N \rightarrow \infty$ の極限でどのような値をとるかは、観測過程の詳細に依存する。同様に、最初に運動量を測定してその直後に同じ系に対して位置を測定することにより得られる測定値から計算される量 $(\Delta p'')_N$ 、 $(\Delta x'')_N$ については、前者は $N \rightarrow \infty$ で Δp に収束するが後者は Δx には収束しない。さらに、一般には

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta x')_N(\Delta p')_N \neq \lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta x'')_N(\Delta p'')_N \quad (2.15)$$

である。これは、非測定系がうける測定の反作用が位置を測定する場合と運動量を測定する場合で異なっているからである。

2.3 非可換観測量の同時測定

不確定性関係は、ハイゼンベルグがガンマ線顕微鏡により電子の位置と運動量を同時に測定するという思考実験に始まる。それによると、測定前の電子の位置と運動量が決まっても測定結果は (2.8) できまる不確定性を持つというものであった。ここでいう不確定性は被測定系（電子）が本来持っているものではなく、測定器（ガンマ線顕微鏡）の持つ不確定性である。しかし、現実には、測定系（測定器）も被測定系（電子）も量子力学に従っているので、観測結果には被測定系の持つ不確定性と測定器の持つ不確定性の両者が影響を与えるはずである。前節の (2.14)、(2.15) はこのことの帰結であると考えられる。特に、粒子の位置と運動量を**同時測定** (simultaneous measurement) すると粒子が本来持つ量子力学的不確定性と測定器の不確定性の両方が結果に影響し、不確定性の大きさはある仮定（後述）の下で (2.8) の2倍（すなわち、 $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ ）となる^{*2}。これは、次のような考察により理解できる。

粒子の位置 $\hat{x}$ と運動量 $\hat{p}$ を同時に測定するために、位置を測定する測定器1と運動量を測定する測定器2を考え、測定器1のオブザーバブルを $\hat{A}$ 、測定器2のオブザーバブルを $\hat{B}$ とする。一般に、 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ はそれぞれ $\hat{x}$ と $\hat{p}$ に依存しなければならない。そこでまず、

$$\hat{A} = f(\hat{x}), \quad \hat{B} = g(\hat{p}) \quad (2.16)$$

と置いて議論を進めよう。オブザーバブル $\hat{A}$ と $\hat{B}$ が交換しない場合は、それらを状態に作用する順序によって結果が変わってしまう。従って、両者が同時に測定できるためには、演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ は交換しなければならない。

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \quad (2.17)$$

^{*2} E. Arthurs and J. L. Kelly, Jr., Bell. Syst. Tech. J. **44**, 725 (1965); E. Arthurs and M. S. Goodman, Phys. Rev. Lett. **60**, 2447 (1988); Y. Yamamoto and H. A. Haus, Rev. Mod. Phys. **58**, 1001 (1986)

この条件が成立すれば $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の両方の固有状態である**同時固有状態** (simultaneous eigenstate) が存在する。測定は、 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の測定結果がそれぞれそのまま $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の情報を与えるものが理想的なので条件

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{x} \rangle, \quad \langle \hat{B} \rangle = \langle \hat{p} \rangle \quad (2.18)$$

を要請しよう。この条件は、 $\hat{A} = \hat{x}$ 、 $\hat{B} = \hat{p}$ とおけば満たされるが、このとき $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ となり、同時測定可能の条件 (2.17) と矛盾する。条件 (2.17) と (2.18) を同時に満足する最も簡単な形は (2.16) のような $\hat{A}$ ($\hat{B}$) が $\hat{x}$ ($\hat{p}$) のみに依存するのではなく

$$\hat{A} = \hat{x} + \hat{X}, \quad \hat{B} = \hat{p} + \hat{Y} \quad (2.19)$$

のような形である。このとき、条件 (2.18) を満足させるためには

$$\langle \hat{X} \rangle = \langle \hat{Y} \rangle = 0 \quad (2.20)$$

を要請すればよい。また、条件 (2.17) を満足させるためには

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{x} + \hat{X}, \hat{p} + \hat{Y}] = [\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{X}, \hat{Y}] + [\hat{x}, \hat{Y}] + [\hat{X}, \hat{p}] = 0 \quad (2.21)$$

でなければならない。被測定系（電子）と測定器の演算子が独立であることを仮定すると

$$[\hat{x}, \hat{Y}] = [\hat{X}, \hat{p}] = 0 \quad (2.22)$$

が成立する。従って (2.21) より

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = -[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar \quad (2.23)$$

が得られる。これから、

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.24)$$

が成立することがわかる。 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ の分散を $\Delta \hat{A} \equiv \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$ 、 $\Delta \hat{B} \equiv \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$ と書くと (2.19) より

$$(\Delta A)^2 \equiv \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \langle [\Delta(\hat{x} + \hat{X})]^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{x})^2 + (\Delta \hat{X})^2 + \Delta \hat{x} \Delta \hat{X} + \Delta \hat{X} \Delta \hat{x} \rangle \quad (2.25)$$

$$(\Delta B)^2 \equiv \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle = \langle [\Delta(\hat{p} + \hat{Y})]^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{p})^2 + (\Delta \hat{Y})^2 + \Delta \hat{p} \Delta \hat{Y} + \Delta \hat{Y} \Delta \hat{p} \rangle \quad (2.26)$$

となる。さらに、測定系と被測定系の物理量の揺らぎに相関がないものと仮定しよう。すなわち、

$$\langle \Delta \hat{x} \Delta \hat{X} + \Delta \hat{X} \Delta \hat{x} \rangle = 0 \quad (2.27)$$

$$\langle \Delta \hat{p} \Delta \hat{Y} + \Delta \hat{Y} \Delta \hat{p} \rangle = 0 \quad (2.28)$$

このとき

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 &= \langle (\Delta \hat{x})^2 + (\Delta \hat{X})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p})^2 + (\Delta \hat{Y})^2 \rangle \\ &= (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 + (\Delta x)^2 (\Delta Y)^2 + (\Delta X)^2 (\Delta p)^2 + (\Delta X)^2 (\Delta Y)^2 \\ &\geq 4 \Delta x \Delta p \Delta X \Delta Y \geq \hbar^2 \end{aligned}$$

こうして

$$\Delta A \Delta B \geq \hbar \quad (2.29)$$

が得られる。これを (2.8) と比較すると、不確定積の下限が 2 倍となっていることがわかる。

(2.29) を導出する際には (2.27) と (2.28) が仮定されたが、もし、これらの式の左辺が負となるような測定ができれば、こんどは (2.29) の左辺の不確定積の下限を $\hbar/2$ よりも小さくすることもできる。そのような測定を記述するハミルトニアンを構成することは可能で、重力波のような極微小の信号の検出に応用できる可能性がある^{*3}。

2.4 一般の非可換観測量の間の不確定性関係

一般に、エルミート演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の交換関係が

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \quad (2.30)$$

で与えられるとき、不確定性関係

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle| \quad (2.31)$$

が成立することが、位置と運動量の不確定性関係の場合と同様に、(2.12) で $\hat{A}$ の代わりに $\hat{D} = t\Delta\hat{A} - i\Delta\hat{B}$ と置くことで証明できる。

一般に、状態 Ψ が非可換なエルミート演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の最小不確定状態（すなわち、(2.31) で等号が成立する状態）となる必要条件是、 Ψ が演算子

$$\hat{D} = e^r \hat{A} \pm ie^{-r} \hat{B} \quad (2.32)$$

(r は実数) の固有状態

$$\hat{D}\Psi = D\Psi, \quad D = e^r \langle \hat{A} \rangle \pm ie^{-r} \langle \hat{B} \rangle \quad (2.33)$$

となっていることである。実際、 $\Delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$ 、 $\Delta\hat{B} \equiv \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$ とおくと、(2.33) から

$$(e^r \Delta\hat{A} \pm ie^{-r} \Delta\hat{B})\Psi = 0$$

が得られる。この状態のノルム^{*4}の自乗を取ると

$$\begin{aligned} \|(e^r \Delta\hat{A} \pm ie^{-r} \Delta\hat{B})\Psi\|^2 &= \langle (e^r \Delta\hat{A} \mp ie^{-r} \Delta\hat{B})(e^r \Delta\hat{A} \pm ie^{-r} \Delta\hat{B}) \rangle \\ &= \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle e^{2r} + \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle e^{-2r} \pm i \langle [\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] \rangle \\ &= \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle e^{2r} + \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle e^{-2r} \mp \langle \hat{C} \rangle = 0 \end{aligned}$$

^{*3} 詳しい議論は次の文献を参照されたい。H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. **51**, 719 (1983), Phys. Rev. Lett. **51**, 1603 (1983) [Erratum]; M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. **60**, 385 (1988); Phys. Lett. **A299**, 1 (2002); Phys. Rev. A **67**, 042105 (2003)

^{*4} 状態 Ψ のノルム $\|\Psi\|$ は $\sqrt{\int \Psi^* \Psi dx}$ である。 $\hat{O}$ を任意の演算子とすると $\hat{O}\Psi$ のノルムは $\|\hat{O}\Psi\| \equiv \sqrt{\int \Psi^* \hat{O}^\dagger \hat{O} \Psi dx}$ と定義される。

ここで、 $\langle \dots \rangle$ は状態 Ψ に対する期待値 $\int \Psi^* \dots \Psi dx$ を表している。また、最後の等式を導く際に交換関係 (2.30) を使った。さらに、ノルムがゼロになるためには $\langle \hat{C} \rangle$ の符号が正 (負) の時は (2.32) の右辺のプラス (マイナス) 符号を取ればよいことがわかる。相加平均が相乗平均よりも大きいことを使うと

$$|\langle \hat{C} \rangle| = \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle e^{2r} + \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle e^{-2r} \geq 2\sqrt{\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle} \quad (2.34)$$

これが、不等式 (2.31) と両立するためには等号が成立しなければならない。従って、状態 $|\Psi\rangle$ は最小不確定状態である。(2.34) で等号が成立するのは、 $\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle e^{2r} = \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle e^{-2r} = |\langle \hat{C} \rangle|/2$ の場合である。従って、最小不確定状態におけるオブザーバブル $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の分散は

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \frac{1}{2} e^{-2r} |\langle \hat{C} \rangle|, \quad \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle = \frac{1}{2} e^{2r} |\langle \hat{C} \rangle| \quad (2.35)$$

で与えられることがわかる。これから、 $|\Psi\rangle$ は $r \rightarrow \infty$ で $\hat{A}$ の固有状態となり、また、 $r \rightarrow -\infty$ で $\hat{B}$ の固有状態となることがわかる。 $r \neq 0$ の場合は、 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の一方の揺らぎが他方の揺らぎよりも小さくなっている。

以上の結果の応用として、ハミルトニアンが

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2$$

で与えられる調和振動子を考え、位置と運動量の期待値が

$$\langle \hat{x} \rangle = x_0, \quad \langle \hat{p} \rangle = p_0 \quad (2.36)$$

で与えられる最小不確定状態が

$$\Psi(x) = \left(\frac{m\omega e^{2r}}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega e^{2r}}{2\hbar} (x-x_0)^2 + \frac{i}{\hbar} p_0 x} \quad (2.37)$$

で与えられることを示せ。また、この状態に対して位置と運動量の分散が

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle = \frac{1}{2} e^{-2r}, \quad \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{1}{2} e^{2r} \quad (2.38)$$

で与えられることを確かめよ。

解答 (2.32) の演算子 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ に対して、それぞれ無次元化された位置と運動量演算子 $\hat{A} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}$ 、 $\hat{B} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} \hat{p}$ を当てはめると、 $[\hat{A}, \hat{B}] = i$ であり (2.32) より最小不確定状態は次の演算子の固有状態である。

$$\hat{D} = e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + i e^{-r} \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} \hat{p} = e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + e^{-r} \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} \frac{d}{dx}$$

(i の前の符号がマイナスの場合の固有状態は存在しない。) 固有値方程式は $\hat{D}\Psi = D\Psi$ であり、これから

$$e^{-r} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d\Psi}{dx} = \left(D - e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) \Psi$$

これを積分すると

$$\Psi(x) = \Psi(0) \exp \left[e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(Dx - \frac{e^r}{2} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x^2 \right) \right] \quad (2.39)$$

波動関数は 1 に規格化されているので

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx &= |\Psi(0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left((D + D^*)x - e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x^2 \right) \right] dx \\ &= |\Psi(0)|^2 e^{e^{2r} \frac{m\omega}{\hbar} x_0^2} \sqrt{\frac{\pi \hbar}{e^{2r} m\omega}} = 1 \end{aligned}$$

これから求められる $\Psi(0)$ を (2.39) に代入すると

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \left(\frac{e^{2r} m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ e^r \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left[\left(e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x_0 + i e^{-r} \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} p_0 \right) x - \frac{e^r}{2} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{2r}}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x_0^2 \right\} \\ &= \left(\frac{e^{2r} m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{e^{2r}}{2} \frac{m\omega}{\hbar} (x-x_0)^2 + \frac{i}{\hbar} p_0 x} \end{aligned} \quad (2.40)$$

(証明終わり)

2.5 時間とエネルギーの不確定性関係

アインシュタイン・ドブロイのもう一つの関係式 $E = \hbar\omega$ より $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ が得られる。これから交換関係 $[\hat{E}, t] = i\hbar$ が成立するので、位置と運動量の不確定性関係 (2.8) と同様に考えて不等式

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \quad (2.41)$$

が導かれるように思われる。実は、不等式 (2.41) は成立するのだが、その解釈は位置と運動量の不確定性関係とは本質的に異なる。その理由は、古典力学と同様に量子力学においても時間は状態の変化を記述するためのパラメータに過ぎず、任意の精度で指定できることが前提とされているからである。実際、波動関数 $\Psi(x, t)$ は各時刻ごとに与えられるので時刻の揺らぎ $\Delta t = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$ という概念は存在しない。(2.8) が位置と運動量が同時に確定した値を取りえないことを主張しているのに対して、(2.41) は、系のエネルギーは各時刻において正確に測定できるが、時間が Δt だけ離れた 2 回の測定によってそれぞれ正確に測定されたエネルギー E と E' の差が $\hbar/(2\Delta t)$ 程度違うことを意味してい

る。従って、エネルギーの保存は Δt だけ時間的に離れた 2 回の測定によって $\hbar/(2\Delta t)$ 程度の精度でしか確かめることができない。これがエネルギーと時間の不確定性関係の物理的意味である。

(2.41) を導くために系とそのエネルギーを測定する測定器を考え、それらを記述するハミルトニアンをそれぞれ $\hat{H}_{\text{系}}$ 、 $\hat{H}_{\text{測定器}}$ と書こう。時刻 $t = 0$ 以前では両者は相互作用しておらず、時刻 $t = 0$ に系のエネルギーを測定するために相互作用 $\hat{V}$ をスイッチオンし、時刻 $t = t_0 (> 0)$ において相互作用を終えろとしよう。この間、全系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{系}} + \hat{H}_{\text{測定器}} + \hat{V} \equiv \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (2.42)$$

で与えられる。全系の状態はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \Psi(x, t) \quad (2.43)$$

に従って時間発展する。ここで相互作用表示に移って

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \Psi_I(x, t) \quad (2.44)$$

とおくと (2.43) は次のように変換される。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_I(x, t) = \hat{V}_I(t) \Psi_I(x, t), \quad \hat{V}_I(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \quad (2.45)$$

系に対する測定の反作用をできるだけ抑えるために、相互作用が小さいと仮定して (2.45) を最低次の近似で解くと

$$\Psi_I(x, t) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^{t_0} \hat{V}_I(t) dt \right) \Psi_I(x, 0) \quad (2.46)$$

ここで、 $\Psi_I(x, 0) = \Psi(x, 0) =: \Psi_i(x)$ に注意すると、全系の波動関数がエネルギーが初期状態 Ψ_i から終状態 Ψ_f へと遷移する確率振幅 a_{fi} は次のように与えられる。

$$a_{fi} = \int \Psi_f^*(x) \Psi_I(x, t) dx \simeq \int \Psi_f^*(x) \Psi_i(x) dx - \frac{i}{\hbar} \int dx \int_0^{t_0} dt \Psi_f^* \hat{V}_I(t) \Psi_i \quad (2.47)$$

始状態と終状態がそれぞれエネルギーが E_i 、 E_f の $\hat{H}_0$ の固有状態であるとする、右辺の第一項は $E_f \neq E_i$ の時固有状態の直交性によりゼロとなる。

$$\begin{aligned} \int dx \Psi_f^* \hat{V}_I(t) \Psi_i &= \int dx \Psi_f^* e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \Psi_i = e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} \int dx \Psi_f^* \hat{V} \Psi_i \\ &\equiv e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} \langle f | \hat{V} | i \rangle \end{aligned}$$

となるので

$$|a_{fi}|^2 \simeq \frac{1}{\hbar^2} \left| \langle f | \hat{V} | i \rangle \int_0^{t_0} dt e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} \right|^2 = 4 |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \frac{\sin^2 \frac{(E_f - E_i) t_0}{2\hbar}}{(E_f - E_i)^2} \quad (2.48)$$

この結果は、始状態と終状態のエネルギーの差 $E_f - E_i$ が (2.48) に従って分布していることを意味しており、その差の最も確からしい値は相互作用が働く時間を t_0 とすると

$|E_f - E_i| \sim \hbar/t_0$ で与えられる。測定器の $E_{f(i)}$ は始（終）状態における系と測定器を合わせた全系のエネルギーであるから、測定器のエネルギーを正確に知ることができると仮定すると、系のエネルギーは $\hbar/t_0$ 程度の精度でしか知ることができない。この結果は、系と測定器の間の相互作用の強さに依らず成立することに注意しよう。特に、相互作用時間が無限大の極限では公式

$$\delta(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \alpha t}{\pi \alpha^2 t} \quad (2.49)$$

を使うと系が状態 i から f へと単位時間あたりに遷移する確率 w_{fi}

$$w_{fi} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|a_{fi}|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (2.50)$$

が得られる。(2.50) は**フェルミの黄金律** (Fermi's golden rule) と呼ばれる。

第 3 章

量子測定理論

3.1 古典的測定器と波束の収縮

量子系を測定する測定器の特徴は、出力（測定結果）が重ね合わせではない確定値をとることである。そのような性質を有する測定器をランダウ＝リフシッツに従って「古典的測定器」(classical apparatus) と呼ぼう^{*1}。測定器の始状態を $\phi_0(\xi)$ 、測定器が取りうるさまざまな状態を $\phi_n(\xi)$ と書こう。ここで、 n は測定器の出力に対応している。量子系の初期状態を $\psi(x)$ と書くと、全系の初期状態は $\psi(x)\phi_0(\xi)$ と書くことができる。次に、量子系と測定器を相互作用させた後の状態を、測定器の完全系 $\{\phi_n\}$ で展開すると、全系の状態は量子系と測定器とのユニタリ相互作用によって次のように時間発展する。

$$\psi(x)\phi_0(\xi) \xrightarrow{\text{ユニタリ}} \sum_n a_n(x)\phi_n(\xi) \quad (3.1)$$

しかし、測定器の古典的性質により、測定直後の全系の状態は測定結果に対応する n の値 n_f に対応する状態

$$a_{n_f}(x)\phi_{n_f}(\xi) \quad (3.2)$$

で与えられる。(3.1) の矢印の右側の重ね合わせの状態から (3.2) への変化は波束の収縮 (state reduction) と呼ばれる。量子論における測定過程は、このような非連続的な状態変化を伴うために、本質的に不可逆である。

一般に短い時間間隔において連続して同じ物理量を測定すると、結果はランダムに変化する。例外は、相互作用ハミルトニアンが座標のみに依存し運動量には依存しない場合の粒子の位置である。この時、粒子の位置は相互作用と可換になり後者の影響を受けない。

ハイゼンベルグは、波動関数は現実の存在を表しているのではなく、実験条件に従って実現される可能性の集合を表していると主張した。また、ボーアは、量子論の数学は、量子現象の統計性に関する知識を与えるアルゴリズムであると考えた (N. Bohr, 1961)。

アインシュタインは、「神はサイコロを振り給わず」という有名な言葉通り、量子力学を現存する最良の理論と認めつつも、これを最終的な理論として受け入れることは終生拒

^{*1} 数学的には、「古典的測定器」とは、出力変数が古典的な確率変数になるものとして定義される。

否した。これに対して、ボーアをはじめとする人々は、「測定が行われるまでは実在というものを考えてはいけない、確率振幅という情報のみが存在する」と主張した。これを、**コペンハーゲン解釈** (Copenhagen interpretation) と言う。

粒子の波動関数は観測するまでは広がっているが、観測するとその直後の粒子の位置は測定精度の範囲で空間のある一点に定まる。これは、あたかも観測によって波動関数がその点に収縮したように思えるので観測による**波束の収縮**と呼ばれる。しかし、コペンハーゲン解釈に従えば、波動関数は実在の波ではなく確率振幅という情報を記述しているものなので、波束の収縮は粒子の存在に関する我々の不確かな知識が観測行為の結果、より確実なものになったという事実を述べているのであり、実在の波が収縮するとは考えてはいけない。

3.2 フォン・ノイマンの理論

フォン・ノイマンは量子と古典の世界の間に人為的な ‘cut’ を導入することを要請した。そして、古典的測定器の読み出し値 n に対応して、量子系の波動関数が $\psi = \sum_n c_n \psi_n$ から ψ_n へと不連続な変化（波束が収縮）が起こることを仮定した。そのようなプロセスはシュレーディンガー方程式では記述できない非ユニタリーな状態変化である。しかも、そのような cut の位置は被測定系から観測者の脳の間に任意に設定できてしまう。

今、被測定系の波動関数を $\sum_n c_n \psi_n(x)$ 、測定器の波動関数を $\phi_0(y)$ と書くと、全系の初期状態の波動関数は次のように書ける。

$$\Psi_0 = \phi_0(y) \sum_n c_n \psi_n(x) \quad (3.3)$$

ここで、 ψ_n としては被測定系のオブザーバブル O の固有状態を選ぼう。

$$O\psi_n = O_n\psi_n \quad (3.4)$$

次に、測定を開始する。被測定系と測定器との相互作用ハミルトニアンとして次のものを選ぶ。

$$H_I = \lambda O p_y = -i\hbar\lambda O \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.5)$$

ここで、相互作用が被測定系や測定器の自由ハミルトニアンに比べて十分に強いと仮定する (impulsive measurement)。この時、 $H \simeq H_I$ と近似でき、測定過程のシュレーディンガー方程式は次のように書ける。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H_I \Psi = -i\hbar\lambda O \frac{\partial}{\partial y} \Psi \quad (3.6)$$

両辺に (3.3) を代入して、(3.4) を用いると

$$\sum_n c_n \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \psi_n = -\lambda \sum_n c_n O_n \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \psi_n \quad (3.7)$$

ここで、時間依存性は測定器の波動関数のみにあるものと仮定した。これは、理想的な測定過程では（結果を読み出すまでは）被測定系の状態は相互作用ハミルトニアンの反作用を受けても変化せず、測定器の状態のみが変化するものと仮定されるからである。各 ψ_n は互いに直交してるので

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} = -\lambda O_n \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \quad (3.8)$$

視察により解は $\phi_0 = \phi_0(y - \lambda O_n t)$ 。よって、相互作用時間 $t = \Delta t$ 後の全系の波動関数は

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n \phi_0(y - \lambda O_n \Delta t) \quad (3.9)$$

で与えられることがわかる。相互作用時間は

$$\lambda \Delta t \Delta O_n \gg 1 \quad (3.10)$$

が満足されるように選ばれる。ここで ΔO_n は固有値 O_n の平均間隔である。条件 (3.10) は、異なった固有値が測定器の出力において識別できるための条件である。この時、各 $\phi_0(y - \lambda O_n \Delta t)$ に対して、被測定系の波動関数 ψ_n が対応する。相互作用の後に、 y の値を観測することにより、全波動関数 Ψ は重ね合わせの状態 (3.9) から特定の成分 $\psi_n \phi_0(y - \lambda O_n \Delta t)$ へと波束の収縮が起こる。そして、そのような事象がおこる確率は $|c_n|^2$ で与えられる。この確率は、被測定系の始状態に現れる係数 c_n から得られるものと一致している。

コペンハーゲン解釈のアキレス腱は、フォン・ノイマンが指摘したように測定される系と測定器、ひいては観測者の間に明瞭な境界線を引くことができないことである。これは、波束の収縮がどこで起こるのかが原理的に決められず、我々が観測結果を認識した時に波束の収縮がおこるのだという極論にまで行き着く。コペンハーゲン解釈は、測定結果を確定させる（あるいは波束を収縮させる）役割をもつ古典的測定器の存在を前提としており、観測結果を解釈するというまさに最終段階で古典論の助けを必要としているといえる。このことは、我々自身がその一部分である宇宙の量子力学的状態を議論する際には原理的な困難となるかもしれない。

通常、一般化された理論は（一般化される前の）元の理論の助けを借りることなく首尾一貫している。しかし、量子論は波動関数を解釈する上で出力が古典確率論に従う古典的測定器が必要なので、量子論は古典論とは独立な理論体系であるとはいえない。ただし、これは量子論が内部矛盾を含んでいることは意味しない。コペンハーゲン解釈は、このように微妙な問題点を含んでいるものの実用上有効であり、量子力学の標準的な解釈となっている。

3.3 多世界解釈

コペンハーゲン解釈は、観測過程を記述するために、次の二つの仮定をしている。

(1) 波束の収縮 (古典的測定器の存在)

(2) ボルンの確率公理 (確率解釈)

これらを仮定することなく、シュレーディンガー方程式だけで観測過程を記述するするために、エベレットは**多世界解釈** (many-world interpretation) と呼ばれる観測過程の解釈を提案した^{*2}。それによると、観測対象も測定器もそれを認識する観測者もシュレーディンガー方程式と波動関数で記述されるものとする。従って、波束の収縮は起こらない。さらに、確率振幅の絶対値の自乗を観測者がそれぞれの事象を観測する頻度に比例する量、すなわち、相対頻度に比例することを「導く」ことができる。

簡単のため、系が取りうる状態が ϕ と ψ の二つだけであると仮定し、同じ波動関数

$$\Phi_i = \alpha\phi_i + \beta\psi_i, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.11)$$

で与えられる N 個の系を考えよう。全系の波動関数はこれらのテンソル積で与えられる。

$$\Psi = \prod_{i=1}^N (\alpha\phi_i + \beta\psi_i) \quad (3.12)$$

右辺を展開すると 2^N 個の項が現れる。このうち、 ϕ が n 回現れる状態は ${}_NC_n$ 個あり、これらを集めると

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{{}_NC_n}} (\phi_1 \cdots \phi_n \psi_{n+1} \cdots \psi_N + \cdots + \psi_1 \cdots \psi_{N-n} \phi_{N-n+1} \cdots \phi_N) \quad (3.13)$$

右辺の係数は波動関数が 1 に規格化されるように決められた。この状態を用いて (3.12) を展開すると

$$\Psi = \sum_{n=0}^N c(n) \Psi_n, \quad c(n) = \alpha^n \beta^{N-n} \sqrt{{}_NC_n} \quad (3.14)$$

が得られる。これから、簡単な計算により

$$\sum_{n=0}^N \left(|\alpha|^2 - \frac{n}{N} \right)^2 |c(n)|^2 = \frac{|\alpha|^2 |\beta|^2}{N} \quad (3.15)$$

が得られるが、右辺は $N \rightarrow \infty$ で 0 となる。これと

$$\sum_{n=0}^N |c(n)|^2 = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^N = 1 \quad (3.16)$$

から次の結果が導かれる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |c(n)|^2 = \begin{cases} 1 & (n = N|\alpha|^2) \\ 0 & (n \neq N|\alpha|^2) \end{cases} \quad (3.17)$$

^{*2} H. Everett III, "Relative State" Formulation of Quantum Mechanics, Rev. Mod. Phys. **29**, 454 (1957); R. Omnès, Consistent interpretations of quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. **64**, 339 (1992).

ボルンの確率公理によると、状態 ϕ が観測される確率は $|\alpha|^2$ で与えられる。多世界解釈ではこの $|\alpha|^2$ という量が、状態 ϕ が全系の波動関数の中に現れる相対頻度 n/N の $N \rightarrow \infty$ の極限として現れる。また、この議論においては波束の収縮という概念が用いられておらず、可能なすべての状態が共存している。

このように多世界解釈は、コペンハーゲン解釈において仮定された波束の収縮を必要とせず、また、確率公理を“定理”として導けるという利点を持っている。他方、全系をシュレーディンガー方程式に従って時間発展させると、複数の観測結果に対応して、観測者の意識もまた重ね合わせの状態にならざるをえない。これを理解するために、簡単のため測定対象の量子状態が $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の二種類しかない場合を考えると、全系の状態は理想的には次のような重ね合わせの状態になる。

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle|\text{測定器の状態: } 0\rangle|\text{測定器の針が } 0 \text{ であることを認識している観測者の状態}\rangle \\ + \beta|1\rangle|\text{測定器の状態: } 1\rangle|\text{測定器の針が } 1 \text{ であることを認識している観測者の状態}\rangle \quad (3.18)$$

このように観測者の意識が観測過程において重ね合わせの状態へ分岐するという帰結は、我々の常識と相反するが、それが論理的矛盾を引き起こさないようにできているところがこの理論の巧妙な点である。その理由は、シュレーディンガー方程式の線形性のために重ね合わされている状態が独立に存在でき、従って、それらの状態間の情報のやり取りができない、すなわち、分岐した相手の存在を認識することができないからである。このことが多世界解釈の無矛盾性を保証している。

3.4 密度演算子

密度演算子は量子力学に内在する不確定性と原理的には知り得る知識が不足していることから生じる不確実性を統一的に扱うことを可能にする。

量子力学において、考えている系に対する完全な情報は波動関数または状態ベクトル $|\Psi\rangle$ で与えられる。このとき系は**純粋状態** (pure state) にあるといい、これに対応する密度演算子は

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (3.19)$$

と定義される。純粋状態の密度演算子は条件

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad (3.20)$$

を満足する。これを**冪等条件** (idempotency condition) という。逆に、冪等条件が満足されているとき、状態は純粋状態にある。

次に、我々が対象に関する完全な情報を持っておらず、互いに直交する状態 $\{|n\rangle\}$ のうちで、系が n 番目にある確率が p_n で与えられることを知っている場合を考える。この場合、密度行列は

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle\langle n| \quad (3.21)$$

で与えられる。このとき

$$\hat{\rho}^2 = \sum_n p_n^2 |n\rangle\langle n| \quad (3.22)$$

となるので、任意の状態 $|\Psi\rangle$ に対して $\langle\Psi|\hat{\rho}^2|\Psi\rangle \leq \langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle$ である。ここで等号を除く不等号を満足する系は**混合状態** (mixed state) にあるという。

逆に、密度演算子 $\hat{\rho}$ が与えられたとき、系が状態 $|n\rangle$ にある確率は (3.21) から

$$p_n = \langle n|\hat{\rho}|n\rangle \quad (3.23)$$

で与えられることがわかる。直交するすべての可能な状態の確率の和は1に等しくなければならないので

$$\sum_n p_n = \sum_n \langle n|\hat{\rho}|n\rangle \equiv \text{Tr}\hat{\rho} = 1 \quad (3.24)$$

が得られる。ここで、 Tr は**トレース** (trace) と呼ばれる演算で、任意の演算子 $\hat{O}$ に対して、規格直交完全系をなす任意の基底 $\{|n\rangle\}$ を用いて

$$\text{Tr}\hat{O} := \sum_n \langle n|\hat{O}|n\rangle \quad (3.25)$$

で定義される。右辺は任意の完全規格直交系 $\{|n\rangle\}$ に対して同じ値をとる。

トレースの特徴は特定の基底 $\{|n\rangle\}$ によらない値を取ることである。トレースのもう一つの重要な性質は**循環性** (cyclic property) である。すなわち、任意の演算子 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ 、 $\hat{C}$ に対して

$$\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \text{Tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A}) \quad (3.26)$$

が成立する。

密度演算子とトレースを用いると、様々な量を特定の基底によらない形で表現できる。例えば、一般のオブザーバブル $\hat{O}$ の期待値は

$$\langle\hat{O}\rangle \equiv \sum_n p_n \langle n|\hat{O}|n\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) \quad (3.27)$$

と書ける。

3.4.1 還元密度演算子

全系が A と B の二つの部分から成り立っている場合を考える。全系の密度演算子を $\hat{\rho}^{A+B}$ と書こう。これが密度演算子であるための条件は正值性（固有値が非負）とトレースが1であるという条件である。まず、正值性から $\hat{\rho}^{A+B}$ を対角化する表示が存在して、対角成分は非負である。すなわち、

$$\hat{\rho}^{A+B} = \sum_n p_n |\Psi_n\rangle_{A+BA+B} \langle\Psi_n| \quad (3.28)$$

全系の状態を知る必要はなく、系 A の状態だけに興味がある場合を考えよう。このとき、系 B についてのみトレースをとることによって、部分系 A の密度演算子を得ることができる。系 B の完全系 $\{|m\rangle_B\}$ を用いると

$$\hat{\rho}^A \equiv \text{Tr}_B(\hat{\rho}^{A+B}) = \sum_n p_n \sum_m {}_B\langle m|\Psi_n\rangle_{A+B} \langle\Psi_n|m\rangle_B \quad (3.29)$$

がえられる。ここで、 Tr_B は系 B に対してのみトレースをとることを意味する。 $\hat{\rho}^A$ を系 A に対する**還元密度演算子** (reduced density operator) という。系 A だけに関係する物理量 $\hat{O}^A$ を問題にする限り $\hat{\rho}^A$ と $\hat{\rho}$ のいずれを用いて計算しても同じ結果が得られる。すなわち、

$$\text{Tr}_A(\hat{\rho}^A \hat{O}^A) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}^A) \quad (3.30)$$

3.5 測定の理論

最近の物理学の進展により、光子や原子の量子状態を 1 個あるいは数個のレベルで人工制御することが可能になっている。その際に使われる基本的な手法は観測による波束の収縮である。従って、少数の量子を人工制御する上で測定行為によって量子状態がどのように変化するかを理解することが不可欠となっている。

いわゆる観測の理論は波束の収縮の起源を議論するが、これは本節の主題ではない。ここでは波束の収縮が起こることは認めて、ある事象が観測される確率とその直後の量子状態を記述する測定の理論について述べる。測定の理論としては、フォンノイマンによる**射影仮説** (projection postulate) に基づく理論が有名であるが、この理論が適用できない実例が数多く存在する。以下に述べる理論は量子情報や量子光学分野で標準的に用いられている**操作的量子測定理論** (operational quantum measurement theory) である。これは、特別な場合として**射影仮説** (projection postulate) に基づくフォンノイマンの測定理論を含んでいる。

量子力学的測定はそれが行われる時刻から見て過去に対する役割と未来に対する役割が全く異なっている。過去に対する役割、同じ量子状態に用意されたアンサンブルに対して測定を繰り返すことにより、量子論で预言された確率分布が再現されるかどうかを確かめることである。未来に対する役割は、各々の測定結果に対する測定直後の量子状態を与えることである。シュレーディンガー方程式は時間反転に対して対称であるが、測定過程におけるこの非対称性のためにある測定が行われた時点の以前と以後は時間反転対称性が破れている。

操作的測定理論によると、測定過程は測定演算子と呼ばれる線形演算子の集合 $\{\hat{A}_m\}$ で記述される。ここで、 m は測定値を表すものとする。測定演算子は次の二つの事柄を記述する。

- 状態 $|\Phi\rangle$ に対して測定値 m が観測される確率 $P(m)$ は

$$P(m) = \|\hat{A}_m|\Phi\rangle\|^2 = \langle\Phi|\hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m|\Phi\rangle \quad (3.31)$$

で与えられる。

- 測定直後の状態 $|\Phi'\rangle$ は

$$|\Phi'\rangle = \frac{\hat{A}_m|\Phi\rangle}{\|\hat{A}_m|\Phi\rangle\|} = \frac{\hat{A}_m|\Phi\rangle}{\sqrt{\langle\Phi|\hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m|\Phi\rangle}} \quad (3.32)$$

で与えられる。

すべての測定値に対する確率の和は1でなければならないので

$$\sum_m P(m) = \sum_m \langle\Phi|\hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m|\Phi\rangle = \langle\Phi|\sum_m \hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m|\Phi\rangle = 1 \quad (3.33)$$

これが任意の規格化された状態 $|\Phi\rangle$ に対して成立するためには測定演算子は完全性条件

$$\sum_m \hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m = \hat{I} \quad (3.34)$$

を満足しなければならない。ここで $\hat{I}$ は恒等演算子である。

具体例として、光子を1個ずつ検出するフォトンカウンタと呼ばれ測定器を用いた光子数の測定を考えよう。光子数が n 個の光子数状態 $|n\rangle$ に対してある短い時間 dt 測定すると、測定結果は光子が全く検出されないか1個検出されるかのいずれかである（測定時間 dt は、その間に光子が2個以上検出される確率が無視できるくらい短くとる）。時間 dt の間に光子が0個、1個検出される場合に対応する測定演算子を $\hat{A}_0$ 、 $\hat{A}_1$ とする。光子が1個検出されると、残りの状態は光子数が1個少ない状態 $|n-1\rangle$ となるはずである。従って、 $\hat{A}_1$ は光子の消滅演算子 $\hat{a}$ に比例すると考えられるので

$$\hat{A}_1 = \sqrt{\lambda dt} \hat{a} \quad (3.35)$$

とおこう。ここで、 λ は測定器と光子との結合の強さを特徴づける定数である。実際、このとき光子を1個を検出する確率は (3.31) より

$$P(1) = \langle n|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|n\rangle = \lambda n dt \quad (3.36)$$

となり、光子数 n と測定時間 dt に比例するという直観と合致する結果が得られる。光子が観測されない場合の測定演算子 $\hat{A}_0$ は条件 (3.34) を満足するように決められる。 $(dt)^2$ のオーダーの項を無視すると

$$\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0 = \hat{I} - \lambda\hat{a}^\dagger\hat{a}dt = \exp(-\lambda\hat{a}^\dagger\hat{a}dt) \quad (3.37)$$

これから

$$\hat{A}_0 = \exp(i\hbar) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}dt\right) \quad (3.38)$$

が得られる。ここで、 $\hat{h}$ は測定器のスイッチをオフした場合 ($\lambda = 0$) に状態が自由場のハミルトニアン $\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ (ω は光子の周波数) にしたがって時間発展するという条件から $\hat{h} = -\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}dt$ が得られる。

3.5.1 射影測定

測定値 m が測定したいオブザーバブル $\hat{O}$ の固有状態 $|m\rangle$ に対応する固有値である場合、演算子 $\hat{A}_m$ として射影演算子 (projection operator)

$$\hat{A}_m = |m\rangle\langle m| \quad (3.39)$$

をとることができる。このクラスに属する測定は射影測定 (projective measurement) と呼ばれる。このとき (3.31)、(3.32) はそれぞれ

$$P(m) = |\langle m|\Phi\rangle|^2 \quad (3.40)$$

$$|\Phi'\rangle = |m\rangle \quad (3.41)$$

となる。射影測定の場合、測定直後の状態は観測された測定値に対応する固有状態となっている。また、(3.40) はボルンの確率解釈に他ならない。

条件 (3.34) は

$$\sum_m |m\rangle\langle m| = \hat{I} \quad (3.42)$$

となる。これはオブザーバブルの固有状態が満足すべき完全性条件に他ならない。さらに、オブザーバブル $\hat{O}$ は次のようにスペクトル分解できる。

$$\hat{O} = \sum_m m|m\rangle\langle m| \quad (3.43)$$

具体例として、スピン 1/2 のスピンを z 軸方向に沿って測定することを考えよう。オブザーバブルとしてパウリ行列の z 成分 $\hat{\sigma}_z$ を考えると、測定値は $m = +1$ と $m = -1$ の 2 通りである。これらの測定値は、それぞれ上向きスピンと下向きスピンの固有状態 $|\uparrow\rangle$ 、 $|\downarrow\rangle$ に対応しているので、(3.39) に従って

$$\hat{A}_1 = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|, \quad \hat{A}_{-1} = |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (3.44)$$

が得られる。これらは完全性の条件 (3.34)

$$\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1 + \hat{A}_{-1}^\dagger\hat{A}_{-1} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = \hat{I} \quad (3.45)$$

を満足しており、また、(3.43) のスペクトル分解は次式で与えられる。

$$\hat{\sigma}_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (3.46)$$

これはパウリ行列の z 成分に他ならない。

3.5.2 POVM 測定

測定直後の系の状態には関心がなく、測定値 m が得られる確率 (3.31) にのみ興味がある場合、 $\hat{A}_m$ の代わりに

$$\hat{M}_m \equiv \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m \quad (3.47)$$

を用いるのが便利である。この演算子は、任意の状態 $|\Phi\rangle$ に対して期待値が

$$\langle \Phi | \hat{M}_m | \Phi \rangle = \|\hat{A}|\Phi\rangle\|^2 \geq 0 \quad (3.48)$$

のようにゼロまたは正となる。任意の状態に対する期待値が負とならない演算子を**正演算子** (positive operator) という。測定モデルが正演算子の集合 $\{\hat{M}_m\}$ から構成されるとき、 $\{\hat{M}_m\}$ を**正演算子値測度** (positive operator-valued measure)、略して POVM という。

3.6 グリーソンの定理

1957 年にグリーソンは 3 次元以上のヒルベルト空間に射影演算子を用いて導入可能な確率測度が $\mu(a) = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_a)$ の形をとることを示した^{*3}。ここで、 $\hat{\rho}$ は密度演算子 (3.4 節参照)、 $\hat{P}_a$ は測定値 a に対応する射影演算子である。2 次元を含む一般的な場合についての証明は正演算子値測度を用いて 2003 年にブッシュによってなされた^{*4}。こうしてボルの確率公理はヒルベルト空間の性質 (具体的には完全系をなす正規直交基底が存在すること) の帰結 (定理) となった。(さらに進んだ注釈: ヒルベルト空間が 3 次元以上の場合に成立する Bell-Kochen-Specker の定理^{*5}はグリーソンの定理の系とみなすことができる。)

^{*3} A. M. Gleason, J. Math. Mech. **6**, 885 (1957)

^{*4} P. Bush, Phys. Rev. Lett. **91**, 120403 (2003)

^{*5} A. Peres, J. Phys. A: Mathematical and General. **24**, L175 (1991).