

# 量子光学講義ノート

上田正仁

2023年7月25日

2022 年度のノーベル物理学賞はベルの不等式の破れと量子情報科学の基礎物理を開拓した 3 人の研究者に与えられたが、ここでは光子のエンタングルメントなど量子光学が基礎となっている。本講義では量子光学の現代的な入門を行う。また、それが現在の量子情報処理にどのようにつながっているかについて講義する。

この講義ノートを作成する際に次の書籍を参考にした。

- 上田正仁 「現代量子物理学」 (培風館 2004)
- 上田正仁 量子力学 II 講義ノート (上田研ホームページ lecture 欄からダウンロード可)
- 沙川貴大、上田正仁 「量子測定と量子制御」 (サイエンス社) .
- ランダウ=リフシツ 「量子力学」 (ちくま学芸文庫 2008)

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>量子力学の基礎</b>	<b>7</b>
1.1	量子力学の特異性	7
1.2	状態ベクトルと物理量	9
1.3	量子もつれ	11
<b>第 2 章</b>	<b>不確定性関係</b>	<b>13</b>
2.1	ハイゼンベルグの不確定性関係	13
2.2	不確定性関係の物理的意味	15
2.3	非可換観測量の同時測定	16
2.4	一般の非可換観測量の間の不確定性関係	18
2.5	時間とエネルギーの不確定性関係	20
<b>第 3 章</b>	<b>量子測定理論</b>	<b>23</b>
3.1	古典的測定器と波束の収縮	23
3.2	フォン・ノイマンの理論	24
3.3	多世界解釈	26
3.4	密度演算子	27
3.5	還元密度演算子	29
3.6	測定の理論	29
3.7	射影測定	31
3.8	POVM 測定	32
3.9	グリーソンの定理	32
<b>第 4 章</b>	<b>電磁場の量子化</b>	<b>33</b>
4.1	マックスウェル方程式	33
4.2	ゲージ不変性	34
4.3	アハラノフ・ボーム効果	37
4.4	超選択則	39
4.5	自由場の正準形式	40
4.6	電荷と磁束の不確定性関係	41

4.7	第二量子化 . . . . .	43
<b>第 5 章</b>	<b>量子光学の典型的な量子状態</b>	<b>47</b>
5.1	光子数状態 . . . . .	47
5.2	コヒーレント状態 . . . . .	48
5.3	グラウバーの定理 . . . . .	50
5.4	熱的状态 . . . . .	51
5.5	スクイズド状態 . . . . .	52
5.6	位相演算子 . . . . .	54
5.7	フォトンカウンティング理論 . . . . .	58
<b>第 6 章</b>	<b>量子干渉効果</b>	<b>61</b>
6.1	二重スリットの実験 . . . . .	61
6.2	光の強度を表す演算子 . . . . .	63
6.3	第二量子化形式による 1 光子干渉の理論 . . . . .	65
6.4	独立な光源からの光の干渉 . . . . .	66
6.5	自発的対称性の破れ . . . . .	68
6.6	量子情報の消去とコヒーレンスの回復 . . . . .	70
6.7	2 光子干渉 . . . . .	72
6.8	時間的非局所相関 . . . . .	74
6.9	時間的ヤングの干渉実験 . . . . .	76
6.10	2 粒子干渉の一般論 . . . . .	77
<b>第 7 章</b>	<b>原子と光の相互作用</b>	<b>79</b>
7.1	原子と光との相互作用 . . . . .	79
7.2	ジェインズーカミングス模型 . . . . .	79
7.3	ラビ分裂とラビ振動 . . . . .	81
7.4	崩壊現象と復活現象 . . . . .	83
7.5	量子回帰定理 . . . . .	86
7.6	量子ゼノン効果 . . . . .	87
7.7	複数の原子と光との相互作用 . . . . .	89
7.8	自然放出のワイスコップーウィグナー理論 . . . . .	92
7.9	共振器量子電気力学 . . . . .	94
<b>第 8 章</b>	<b>非局所相関、隠れた変数、文脈依存性</b>	<b>97</b>
8.1	物理的実在に関する EPR と Bohr の論争 . . . . .	97
8.2	ベルの不等式 . . . . .	102
8.3	グリーンバーガー・ホーン・ツァイリンガー (GHZ) 状態 . . . . .	107
8.4	非局所相関の実験 . . . . .	108

---

8.5	ベル-コッヘン-スペッカー定理 . . . . .	111
8.6	レゲッターガーグの不等式 . . . . .	112
8.7	クローン禁止定理 . . . . .	115
	索引	117



# 第1章

## 量子力学の基礎

量子光学は、2022年度ノーベル物理学賞の受賞対象となったクラウザーやアスペによるベルの不等式の破れの実験など、量子力学の不思議な性質を直接的に検証する実験を可能にしている。これらを深く理解するための準備として、本章では量子力学の基礎の復習をしよう。

### 1.1 量子力学の特異性

#### 1.1.1 精密科学でありながら本質的理解が困難な量子力学

量子力学は原子・電子・光子などが持つ共通の性質である粒子性と波動性を統一的に記述する学問体系である。しかし、統一の代償として物理的実在、すなわち、物質は我々が観測する・しないに関わらず存在するという素朴実在論を放棄しなければならない。このことは我々が日常生活で前提としているマクロな世界の物質観と鋭く対立する。このミクロとマクロな世界観の相克は量子論の創始者たちを悩まし続けた。ここでは、アインシュタイン、ファインマン、ゲルマンが量子力学についてどのように考えていたかを紹介する。

Quantum mechanics is certainly imposing. But an inner voice tells me that it is not yet the real thing. ... I, at any rate, am convinced that He does not throw dice. (A. Einstein. Letter to Max Born, 1926)

I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics. (R. Feynman)

Quantum mechanics, that mysterious, confusing discipline, which none of us really understands but which we know how to use. (M. Gell-mann)

我々は量子力学の計算法は知っているがなぜそれが正しい答えを与えてくれるのかは十分には理解していないのである。ここに量子力学の直感に反する予言を実験的に検証できる量子光学のファンダメンタル物理の観点からの意義が存在する。

量子力学は、アインシュタインなどの創始者を悩ませた不可思議な性質を有するが、これは量子力学があやふやな学問であるという意味では決してない。それどころか、量子力学は最も正確な定量的予言を可能にしてくれる精密科学であり、その理論体系には操作論的観点からのあいまいさはほとんどない。そのような理論は、普通は初めは難解でも慣れれば簡単に思えてくるものである。相対性理論はその典型例である。しかし、量子力学の予言は実験で実証されても不思議さは消えない。言わば、解釈を拒絶した自然の奥深い神秘を垣間見るような不思議な気持ちになる。

### 1.1.2 量子力学は力学過程と測定過程の2部構成

ある理論を一般化してできた理論は、通常はそれ自身で論理的に完結したものであり、一般化する前の特殊な理論の助けを借りることなく理論を構築できる。例えば、一般相対性理論は特殊相対性理論を含むが、前者を構成するにあたって後者の助けを必要としない。

量子力学の場合、シュレーディンガー方程式でプランク定数をゼロとする極限をとると古典力学が得られる。しかし、出力が古典的（すなわち、重ね合わせの原理が成立しない）確率変数で与えられる古典的測定器の助けを借りることなく測定のプロセスを記述することができない。この問題は観測の問題と呼ばれ、これまで提案されてきた様々な解釈（コペンハーゲン解釈、多世界解釈）のうちのどれが正しいのかという論争は今日に至るまで決着がついていない。ただし、解釈の問題は量子力学を使って様々な物理量を計算する上でのあいまいさは生じない。実際、量子力学は最も精密な予言を可能にする精密科学である（微細構造定数の測定精度は12桁）。その一方で、波束がどの時点で、また、どうして収縮して古典的な測定値を生み出すのかという問題は未解決のまま残っている。数学的な観点から言うと、量子力学はユニタリーな時間発展によって記述される力学的な部分と非ユニタリーな時間変化をする測定過程の2部構成になっている。

### 1.1.3 過去・現在・未来

古典力学では、測定の精度とその反作用を独立に決めることができる。このような考え方の背後には、測定対象が測定過程とは独立に存在するという暗黙の仮定が存在している。しかしながら、量子力学では、後に述べる不確定性関係のために測定の精度を決めると、その反作用を任意に小さくすることができない。このことから、知りたい系の性質は、測定過程の詳細に依存するものと結論できる。量子論においては、測定対象が観測者と独立に存在できるという古典的世界観を放棄しなければならない。

古典力学では、ある時刻においてすべての粒子の位置と速度を指定すれば、それ以後の系の振る舞いを完全に予言できる。フランスの数学者ラプラスはこの状況を次のように述べた。もしもある瞬間における全ての物質の力学的状態と力を知ることができ、かつ、もしもそれらのデータを解析できるだけの能力を有する知性が存在するとすれば、この知性



にとっては、不確実なことは何もなく、その目には未来も（過去同様に）全て見えているであろう（ラプラス『確率の解析的理論』1812年）。そのような万能な「知性」は、ラプラスの悪魔と呼ばれている。このように古典論的世界においては、過去と未来が1対1で結びついており、「悪魔」にとってはすべてがお見通しであり、力学が神にとって代わることができる。ここでは、時間は決定論的に変化する事象の系列を順序づけるパラメータに過ぎない。言い換えれば、時間軸上において「現在」は何ら特別ではない。

しかし、量子論においては位置と速度を同時に正確に知ることはできない。従って、未来の予測は古典論に比べてより不確実なものになる。例えば、すべての粒子の位置のある時刻に完全に決定すれば、その直後の運動量は全く不確定になる。このように、ある一組の物理量を完全に決めると、その組に含まれる物理量の関数以外のいかなる物理量も全く不確定になるような物理量の組を物理量の完全な組という。このことは、ある時刻に物理量の完全な組を正確に決定すると、それ以降の系の時間発展はそれ以前の系の状態とは無関係に決まることを意味する。このように、量子論においては、系を観測した時刻「現在」を中心として、未来と過去で質的に異なった役割を果たすのである。過去に対しては、量子力学が予言した確率分布を測定で確認することができる。未来に対しては、測定過程によって全く新しい状態を作り出される。

## 1.2 状態ベクトルと物理量

### 1.2.1 状態ベクトル

系の状態は、ヒルベルト空間の状態ベクトル (state vector, ket  $|\psi\rangle$ ) によって記述される。位相因子  $e^{i\theta}$  ( $\theta$  は実数) だけ異なる状態 ( $|\psi\rangle$  と  $e^{i\theta}|\psi\rangle$ ) は物理的に同等であり、同じ射線 (ray) に属するという。しかし、異なった状態を重ね合わせる時の位相差は物理的に意味があり、干渉効果を生む。

### 1.2.2 物理量 (オブザーバブル)

量子力学における物理量は状態に作用するエルミート演算子である。ここで、演算子  $\hat{O}$  のエルミート共役な演算子  $\hat{O}^\dagger$  の行列要素は

$$\langle\phi|\hat{O}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\phi\rangle^* \quad (1.1)$$

で定義される（転置して複素共役をとる）。

演算子は  $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$  を満足するときエルミート共役であるといわれる。このとき

$$\langle\phi|\hat{O}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\phi\rangle^* = \langle\phi|\hat{O}|\psi\rangle \quad (1.2)$$

となる。特に、対角要素  $\phi = \psi$  は実数になる。演算子がエルミートであることを要請すると、それに対応する物理量の期待値は実数になる<sup>\*1</sup>。

<sup>\*1</sup> エルミート性は物理量の期待値が常に実数であるための十分条件であるが必要条件ではないことに注意し

数学的な注釈： $\hat{O}$  の定義域  $D(\hat{O})$  と  $\hat{O}^\dagger$  の定義域  $D(\hat{O}^\dagger)$  は、作用素が有界の場合は一致するが、非有界な場合は一般には一致しない。条件

$$\langle \hat{O}\phi | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{O}\psi \rangle \quad (1.3)$$

を満足する演算子  $\hat{O}$  をエルミート演算子という。エルミート演算子のうち、 $\hat{O}^\dagger$  が定義でき、かつ、 $D(\hat{O}) = D(\hat{O}^\dagger)$  のものを自己共役（あるいは自己随伴）演算子という。作用素が有界な場合は、定義域はヒルベルト空間全体に取ることができるので、自己共役演算子とエルミート演算子は一致する。しかし、非有界の場合は、自己共役演算子はエルミート演算子であるが逆は真ではない。なぜなら、エルミート性は演算子だけの性質であり、それが作用する定義域に関する条件は課されないからである。

エルミート演算子是对角化可能で固有値は実数とよく言われるが、実際には演算子が対角化（すなわち、スペクトル分解）できることを保証するのは自己共役性である<sup>\*2</sup>。特に、固有値が離散的な場合は、演算子  $\hat{O}$  が自己共役であれば  $\hat{O}$  は次のように対角表示で展開できる。

$$\hat{O} = \sum_n O_n P_n, \quad P_n = |n\rangle\langle n| \quad (1.4)$$

$P_n$  は射影演算子と呼ばれ、 $P_n^2 = P_n$  を満足する自己共役演算子として定義される。

### 1.2.3 重ね合わせの原理

重ね合わせの原理は、次の2つのことを主張する。

- 波動関数  $\Psi_1$  と  $\Psi_2$  がシュレーディンガー方程式の2つの解とすると、それらの線形結合  $\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$  も解である。ここで、 $a, b$  は一般に複素数の定数である。
- 状態  $\Psi_1$  と  $\Psi_2$  の時間発展がそれぞれ  $\Psi_1(t)$  と  $\Psi_2(t)$  で与えられるとすると、状態  $\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$  の時間発展は、 $\Psi(t) = a\Psi_1(t) + b\Psi_2(t)$  で与えられる。

重ね合わせの原理から、波動関数  $\Psi$  が従う基礎方程式は  $\Psi$  について線形でなければならないことが分かる。

重ね合わせが禁止される場合がある（超選択則）。原子数や電荷が異なる状態の重ね合わせの状態は存在しない。これはバリオン数や電荷が保存されるからである。バリオン数は大統一理論ではスファレロン過程で破れるが、電荷はゲージ理論を信じる限り厳密に保存される。超伝導の Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) 理論はクーパー対の生成・消滅を通じて電子数保存を破るが、これは BCS 理論が平均場近似をした結果である。

重ね合わせの原理が要求する時間発展線形性は様々な重大な帰結を導く。その1つは、量子力学にはカオスが存在しないということである。カオスは初期状態のわずかな変化が

よう。例えば、時間反転とパリティ対称な非エルミートなハミルトニアン固有値は実数となりうる。具体例は、2017年度量子力学IIの中間試験問題5を参照。

<sup>\*2</sup> 例えば、新井朝雄、江沢洋 「量子力学の数学的構造(1)」(朝倉物理学体系, 1997)を参照。

終状態に大きな変化をもたらす。しかし、量子力学の線形性により、初期状態がわずかに変化しても終状態の変化は指数関数的に増大することはできない。このことを数式で見よう。古典カオス系の場合は2つの軌道  $x_1, x_2$  の初期位置が  $\delta x(0) = x_1(0) - x_2(0)$  だけ変化すると後の時刻の変化は  $\delta x(t) = e^{\lambda t} \delta x(0)$  のように指数関数的に増大する。ここで、 $\lambda > 0$  はリアプノフ指数 (Lyapunov exponent) である。一方、量子力学の場合、2つの波動関数の差  $\delta\psi(0) := \psi_1(0) - \psi_2(0)$  は時間  $t$  後には  $\delta\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$  となる。 $\psi_1, \psi_2$  のノルムが1に規格化されていることから  $\delta\psi(t)$  のノルムは指数関数的に増大することはできない。もう一つの重大な帰結は後に述べるクローン禁止定理の証明である。

量子力学の線形性がどれくらいの精度で実験的に成立しているのかは、スピンの際差運動を長時間観測し、スピンの方向と外部磁場のなす角度が時間的に変化するかどうかを調べることで検証できる。量子力学の線形性が破れると、たとえばスピンの際差運動の振動数がスピンの向きと磁場とのなす角度に依存して変化する。しかし、 ${}^9\text{Be}^+$  を用いた実験によると、そのようなずれは21桁の精度で0である [Steven Weinberg, “Precision Tests of Quantum Mechanics” Phys. Rev. Lett. vol. 62, 485-488 (1989)]。この精度は現在では27桁まで向上している。さらに、量子力学が非線形性を持つと、光速よりも早く通信をすることが可能になる (Christoph Simon, Vladimir Buzek, and Nicolas Gisin, “No-Signaling Condition and Quantum Dynamics”, Phys. Rev. Lett. vol. 87, 170405 (2001))。つまり、量子力学の線形性が破れると、相対論も破れるのである。

### 1.3 量子もつれ

系が2つの部分 A、B からなり、それぞれの部分が波動関数  $\psi^A(x)$  と  $\phi^B(y)$  で完全に記述されていると仮定しよう。この時、全系の状態も完全に決まっており、その波動関数  $\Psi^{AB}$  は

$$\Psi^{AB}(x, y) = \psi^A(x)\phi^B(y) \quad (1.5)$$

のように積の形 (テンソル積) で書ける。しかし、全系の波動関数が決まっている場合には、その部分系は一般には波動関数では記述できない (部分系の密度演算子のみ決まる)。実際、 $\Psi^{AB}$  は一般に

$$\Psi^{AB}(x, y) = \sum_n \psi_n^A(x)\phi_n^B(y) \quad (1.6)$$

のような形に書ける。この式は関数  $\Psi^{AB}(x, y)$  を系 B を記述する完全系  $\{\phi_n^B(y)\}$  で展開した時の展開係数が  $\psi_n^A(x)$  であると解釈できる。

以上のように、部分系の間には量子もつれとよばれる古典論には存在しない相関が存在しうる。一般に、(1.5) のように全系の波動関数が部分系の波動関数の直積で書けないとき、エンタングルしている、量子もつれ状態にある、などという。エンタングルしている状態は (1.6) のように複数の直積状態が重ね合わさった状態で表される。



## 第2章

# 不確定性関係

### 2.1 ハイゼンベルグの不確定性関係

運動量演算子  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  の固有値方程式を考える。

$$\hat{p}\Psi_p(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_p(x) = p\Psi_p(x). \quad (2.1)$$

$\Psi_p(x)$  は固有値  $p$  に対応する固有関数である。この状態  $\Psi_p(x)$  に対して運動量を測定すると必ず測定値  $p$  が得られる。(2.1) を解くと固有関数が平面波

$$\Psi_p(x) = C e^{\frac{i}{\hbar} p x} \quad (2.2)$$

であることがわかる。ここで、 $C$  は定数である。この状態にある粒子が位置  $x$  で見出される確率密度  $|\Psi_p(x)|^2 = |C|^2$  は場所によらず一定である。従って、運動量が確定した状態は位置が全く不確定になる。同様に、位置が確定した状態の運動量は全く不確定である。このように、古典力学と異なり、量子力学では位置と運動量は同時に確定した値をとることができない。

位置と運動量のとりうる値の不確かさを表す量として次のような標準偏差を導入する。

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}, \quad \Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}. \quad (2.3)$$

ここで、記号  $\langle \hat{O} \rangle$  はオブザーバブル  $\hat{O}$  の期待値

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \Psi^*(x) \hat{O} \Psi(x) dx \quad (2.4)$$

を表すものとする。 $\Delta x$ ,  $\Delta p$  を波動関数がガウス型

$$\Psi(x) = \left( \frac{1}{\pi d^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2d^2}} \quad (2.5)$$

の場合に計算しよう。波動関数 (2.5) は偶関数なので、 $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$ 。また

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \left( \frac{1}{\pi d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{d^2}} dx = \left( \frac{1}{\pi d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (\pi d^6)^{\frac{1}{2}} = \frac{d^2}{2} \\ \langle \hat{p}^2 \rangle &= \left( \frac{1}{\pi d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{d^2}} \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) e^{-\frac{x^2}{d^2}} dx = \frac{\hbar^2}{2d^2} \end{aligned}$$

よって

$$\Delta x = \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad \Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}d} \quad (2.6)$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (2.7)$$

が成立することがわかる。

下に示すように、一般に不等式

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.8)$$

が成立する。これを位置と運動量に関する**不確定性関係** (uncertainty relation) と言う。特に、等式が成立する状態を**最小不確定状態** (minimum-uncertainty state) という。ガウス型の波動関数 (2.5) は最小不確定状態の一例となっている。

(2.8) の一般的な証明は次のようになされる。任意の関数  $f(x)$  に  $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$  を作用させ  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  を使うと

$$(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})f(x) = \hat{x} \frac{\hbar}{i} \frac{df(x)}{dx} - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}(xf) = \frac{\hbar}{i} \left[ x \frac{df}{dx} - \left( x \frac{df}{dx} + f \right) \right] = i\hbar f(x)$$

これが任意の関数  $f(x)$  に対して成立するので、

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad (2.9)$$

が成立する。 $\hbar \rightarrow 0$  なる極限をとると  $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$  の差はゼロとなり古典論の結果と一致する。これは、 $\hbar$  をゼロとする極限をとることにより、量子論は古典論へと移行することを意味している<sup>\*1</sup>。位置と運動量の**交換関係** (commutation relation) は、

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.10)$$

と書ける。

さて、位置および運動量のオブザーバブルからその期待値を引いた演算子

$$\Delta \hat{x} \equiv \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle, \quad \Delta \hat{p} \equiv \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle \quad (2.11)$$

とそれらの線形結合で表される演算子

$$\hat{A} \equiv t\Delta \hat{x} - i\Delta \hat{p} \quad (2.12)$$

を定義する。ここで、 $t$  は実数であるとする。このとき、 $\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle \equiv \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = (\Delta x)^2$ 、 $\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle \equiv \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = (\Delta p)^2$  が成立することに注意しよう。 $\langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle$  は非負なので、これに (2.12) を代入すると実数  $t$  に対して次の不等式が成立することがわかる。

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle &= \langle (t\Delta \hat{x} + i\Delta \hat{p})(t\Delta \hat{x} - i\Delta \hat{p}) \rangle = t^2 \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle + it \langle \Delta \hat{p} \Delta \hat{x} - \Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \rangle + \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle \\ &= t^2 \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle + it \langle \hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} \rangle + \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = t^2 (\Delta x)^2 + \hbar t + (\Delta p)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

<sup>\*1</sup> アインシュタイン-ド・ブロイの関係式  $p = \hbar k$  で  $\hbar \rightarrow 0$  なる極限をとると  $p$  はゼロになってしまう。正しい極限操作は、 $\hbar$  をゼロとすると同時に  $k$  を積  $\hbar k$  を一定に保ちつつ無限大にすることである。これは、波の波長  $\lambda = 2\pi/k$  をゼロとする**幾何光学** (geometrical optics) の極限をとることに対応している。

これが、任意の実数  $t$  で成立するためには、判別式は 0 または負でなければならない。

$$D = \hbar^2 - 4(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \leq 0$$

こうして不確定性関係 (2.8) が証明された。(2.8) はケナード・ロバートソンの不等式と呼ばれる。この証明から明らかなように、ケナード・ロバートソンの不等式は測定過程とは無関係な波動関数の性質を表している。これに対して、ハイゼンベルグの不確定性関係は位置の測定精度とその測定による運動量への擾乱の間に成立する関係式を言う。

## 2.2 不確定性関係の物理的意味

不等式  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$  を実験的に検証する方法を考察することにより、不確定性関係の物理的意味を考察しよう。不等式 (2.8) は、数学的には任意の与えられた波動関数  $\Psi(x)$  に対して位置の標準偏差  $\Delta x$  を計算し、同じ波動関数に対して運動量の標準偏差  $\Delta p$  を計算する。すると、両者の積は常に  $\hbar/2$  よりも大きくなるという主張である。これは次のようにして実験的に検証できる。

同一の波動関数  $\Psi$  で記述される系を  $2N$  個準備する。まず、その半分の  $N$  個の系のそれぞれに対して位置を正確（すなわち、測定誤差無しで）に測定し、測定結果  $x_1, x_2, \dots, x_N$  が得られたとしよう。これらの測定データから計算された標準偏差を  $(\Delta x)_N$  とすると、この量は  $N$  が無限大の極限で波動関数を使って計算された標準偏差  $\Delta x$  に収束する。同様に、残りの半分の  $N$  個の系に対して運動量を測定誤差無しに測定して得られた測定結果  $p_1, p_2, \dots, p_N$  から計算される標準偏差  $(\Delta p)_N$  は、 $N$  が無限大の極限で波動関数から計算された  $\Delta p$  に収束する。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta x)_N = \Delta x, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta p)_N = \Delta p. \quad (2.13)$$

両者の積  $(\Delta x)_N(\Delta p)_N$  は同じ極限で  $\hbar/2$  以上となる。位置や運動量を測定誤差無しに測定しても、毎回測定結果がばらつくのは被測定系の波動関数の広がりである。これが、不確定性関係 (2.8) の物理的意味である。

不確定性関係 (2.8) が被測定系の波動関数の性質のみで決まり、測定過程に依存しないのは、位置と運動量を別々に測定したからである。このことをより深く理解するために次のような測定を考えよう。

系に対してまず位置を誤差なしで測定して測定値  $x'_1$  が得られたとして、その直後に同じ系に対して引き続き運動量を測定し、測定値  $p'_1$  が得られたとしよう。同様の操作を同じ波動関数  $\Psi$  で記述される  $N$  個の系に対して実行し、その結果得られる測定データを  $x'_1, x'_2, \dots, x'_N, p'_1, p'_2, \dots, p'_N$  とする。そして、これらから計算された位置と運動量の標準偏差をそれぞれ  $(\Delta x')_N, (\Delta p')_N$  と書こう。このとき、 $N$  が無限大の極限で前者は波動関数  $\Psi$  から計算された位置の標準偏差  $\Delta x$  に収束するが、後者は同じ  $\Psi$  を用いて計算された運動量の標準偏差  $\Delta p$  には収束しない。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta x')_N = \Delta x, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta p')_N \neq \Delta p \quad (2.14)$$

その理由は、位置を測定した後の波動関数は測定の反作用を受けるために、 $\Psi$ とは異なった状態になっているからである。実際、位置を誤差なしで測定した直後の状態の運動量の不確定性は無限大になっているはずである。一般に、誤差なしでない測定をした場合も含めて、不確定積  $(\Delta x')_N(\Delta p')_N$  が  $N \rightarrow \infty$  の極限でどのような値をとるかは、観測過程の詳細に依存する。同様に、最初に運動量を測定してその直後に同じ系に対して位置を測定することにより得られる測定値から計算される量  $(\Delta p'')_N$ 、 $(\Delta x'')_N$  については、前者は  $N \rightarrow \infty$  で  $\Delta p$  に収束するが後者は  $\Delta x$  には収束しない。さらに、一般には

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta x')_N(\Delta p')_N \neq \lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta x'')_N(\Delta p'')_N \quad (2.15)$$

である。これは、被測定系がうける測定の反作用が位置を測定する場合と運動量を測定する場合で異なっているからである。

## 2.3 非可換観測量の同時測定

不確定性関係は、ハイゼンベルグがガンマ線顕微鏡により電子の位置と運動量を同時に測定するという思考実験に始まる。それによると、測定前の電子の位置と運動量が決まっても測定結果は (2.8) できまる不確定性を持つというものであった。ここでいう不確定性は被測定系（電子）が本来持っているものではなく、測定器（ガンマ線顕微鏡）の持つ不確定性である。しかし、現実には、測定系（測定器）も被測定系（電子）も量子力学に従っているので、観測結果には被測定系の持つ不確定性と測定器の持つ不確定性の両者が影響を与えるはずである。前節の (2.14)、(2.15) はこのことの帰結であると考えられる。特に、粒子の位置と運動量を**同時測定** (simultaneous measurement) すると粒子が本来持つ量子力学的不確定性と測定器の不確定性の両方が結果に影響し、不確定性の大きさはある仮定（後述）の下で (2.8) の2倍（すなわち、 $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ ）となる\*2。これは、次のような考察により理解できる。

粒子の位置  $\hat{x}$  と運動量  $\hat{p}$  を同時に測定するために、位置を測定する測定器1と運動量を測定する測定器2を考え、測定器1のオブザーバブルを  $\hat{A}$ 、測定器2のオブザーバブルを  $\hat{B}$  とする。一般に、 $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  はそれぞれ  $\hat{x}$  と  $\hat{p}$  に依存しなければならない。そこでまず、

$$\hat{A} = f(\hat{x}), \quad \hat{B} = g(\hat{p}) \quad (2.16)$$

と置いて議論を進めよう。オブザーバブル  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  が交換しない場合は、それらを状態に作用する順序によって結果が変わってしまう。従って、両者が同時に測定できるためには、演算子  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  は交換しなければならない。

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \quad (2.17)$$

\*2 E. Arthurs and J. L. Kelly, Jr., Bell. Syst. Tech. J. **44**, 725 (1965); E. Arthurs and M. S. Goodman, Phys. Rev. Lett. **60**, 2447 (1988); Y. Yamamoto and H. A. Haus, Rev. Mod. Phys. **58**, 1001 (1986)



この条件が成立すれば  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の両方の固有状態である**同時固有状態** (simultaneous eigenstate) が存在する。測定は、 $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の測定結果がそれぞれそのまま  $\hat{x}$  と  $\hat{p}$  の情報を与えるものが理想的なので条件

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{x} \rangle, \quad \langle \hat{B} \rangle = \langle \hat{p} \rangle \quad (2.18)$$

を要請しよう。この条件は、 $\hat{A} = \hat{x}$ 、 $\hat{B} = \hat{p}$  とおけば満たされるが、このとき  $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  となり、同時測定可能の条件 (2.17) と矛盾する。条件 (2.17) と (2.18) を同時に満足する最も簡単な形は (2.16) のような  $\hat{A}$  ( $\hat{B}$ ) が  $\hat{x}$  ( $\hat{p}$ ) のみに依存するのではなく

$$\hat{A} = \hat{x} + \hat{X}, \quad \hat{B} = \hat{p} + \hat{Y} \quad (2.19)$$

のような形である。このとき、条件 (2.18) を満足させるためには

$$\langle \hat{X} \rangle = \langle \hat{Y} \rangle = 0 \quad (2.20)$$

を要請すればよい。また、条件 (2.17) を満足させるためには

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{x} + \hat{X}, \hat{p} + \hat{Y}] = [\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{X}, \hat{Y}] + [\hat{x}, \hat{Y}] + [\hat{X}, \hat{p}] = 0 \quad (2.21)$$

でなければならない。被測定系（電子）と測定器の演算子が独立であることを仮定すると

$$[\hat{x}, \hat{Y}] = [\hat{X}, \hat{p}] = 0 \quad (2.22)$$

が成立する。従って (2.21) より

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = -[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar \quad (2.23)$$

が得られる。これから、

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.24)$$

が成立することがわかる。 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$  の分散を  $\Delta \hat{A} \equiv \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$ 、 $\Delta \hat{B} \equiv \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$  と書くと (2.19) より

$$(\Delta A)^2 \equiv \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \langle [\Delta(\hat{x} + \hat{X})]^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{x})^2 + (\Delta \hat{X})^2 + \Delta \hat{x} \Delta \hat{X} + \Delta \hat{X} \Delta \hat{x} \rangle \quad (2.25)$$

$$(\Delta B)^2 \equiv \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle = \langle [\Delta(\hat{p} + \hat{Y})]^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{p})^2 + (\Delta \hat{Y})^2 + \Delta \hat{p} \Delta \hat{Y} + \Delta \hat{Y} \Delta \hat{p} \rangle \quad (2.26)$$

となる。さらに、測定系と被測定系の物理量の揺らぎに相関がないものと仮定しよう。すなわち、

$$\langle \Delta \hat{x} \Delta \hat{X} + \Delta \hat{X} \Delta \hat{x} \rangle = 0 \quad (2.27)$$

$$\langle \Delta \hat{p} \Delta \hat{Y} + \Delta \hat{Y} \Delta \hat{p} \rangle = 0 \quad (2.28)$$

このとき

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 &= \langle (\Delta \hat{x})^2 + (\Delta \hat{X})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p})^2 + (\Delta \hat{Y})^2 \rangle \\ &= (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 + (\Delta x)^2 (\Delta Y)^2 + (\Delta X)^2 (\Delta p)^2 + (\Delta X)^2 (\Delta Y)^2 \\ &\geq 4 \Delta x \Delta p \Delta X \Delta Y \geq \hbar^2 \end{aligned}$$

こうして

$$\Delta A \Delta B \geq \hbar \quad (2.29)$$

が得られる。これを (2.8) と比較すると、不確定積の下限が 2 倍となっていることがわかる。

(2.29) を導出する際には (2.27) と (2.28) が仮定されたが、もし、これらの式の左辺が負となるような測定ができれば、こんどは (2.29) の左辺の不確定積の下限を  $\hbar/2$  よりも小さくすることもできる。そのような測定を記述するハミルトニアンを構成することは可能で、重力波のような極微小の信号の検出に応用できる可能性がある\*3。

## 2.4 一般の非可換観測量の間の不確定性関係

一般に、エルミート演算子  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の交換関係が

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \quad (2.30)$$

で与えられるとき、不確定性関係

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle| \quad (2.31)$$

が成立することが、位置と運動量の不確定性関係の場合と同様に、(2.12) で  $\hat{A}$  の代わりに  $\hat{D} = t\Delta\hat{A} - i\Delta\hat{B}$  と置くことで証明できる。

一般に、状態  $\Psi$  が非可換なエルミート演算子  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の最小不確定状態（すなわち、(2.31) で等号が成立する状態）となる必要条件是、 $\Psi$  が演算子

$$\hat{D} = e^r \hat{A} \pm ie^{-r} \hat{B} \quad (2.32)$$

( $r$  は実数) の固有状態

$$\hat{D}\Psi = D\Psi, \quad D = e^r \langle \hat{A} \rangle \pm ie^{-r} \langle \hat{B} \rangle \quad (2.33)$$

となっていることである。実際、 $\Delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$ 、 $\Delta\hat{B} \equiv \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$  とおくと、(2.33) から

$$(e^r \Delta\hat{A} \pm ie^{-r} \Delta\hat{B})\Psi = 0$$

が得られる。この状態のノルム\*4の自乗を取ると

$$\begin{aligned} \|(e^r \Delta\hat{A} \pm ie^{-r} \Delta\hat{B})\Psi\|^2 &= \langle (e^r \Delta\hat{A} \mp ie^{-r} \Delta\hat{B})(e^r \Delta\hat{A} \pm ie^{-r} \Delta\hat{B}) \rangle \\ &= \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle e^{2r} + \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle e^{-2r} \pm i \langle [\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] \rangle \\ &= \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle e^{2r} + \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle e^{-2r} \mp \langle \hat{C} \rangle = 0 \end{aligned}$$

\*3 詳しい議論は次の文献を参照されたい。H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. **51**, 719 (1983), Phys. Rev. Lett. **51**, 1603 (1983) [Erratum]; M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. **60**, 385 (1988); Phys. Lett. **A299**, 1 (2002); Phys. Rev. A **67**, 042105 (2003)

\*4 状態  $\Psi$  のノルム  $\|\Psi\|$  は  $\sqrt{\int \Psi^* \Psi dx}$  である。 $\hat{O}$  を任意の演算子とすると  $\hat{O}\Psi$  のノルムは  $\|\hat{O}\Psi\| \equiv \sqrt{\int \Psi^* \hat{O}^\dagger \hat{O} \Psi dx}$  と定義される。

ここで、 $\langle \dots \rangle$  は状態  $\Psi$  に対する期待値  $\int \Psi^* \dots \Psi dx$  を表している。また、最後の等式を導く際に交換関係 (2.30) を使った。さらに、ノルムがゼロになるためには  $\langle \hat{C} \rangle$  の符号が正 (負) の時は (2.32) の右辺のプラス (マイナス) 符号を取ればよいことがわかる。相加平均が相乗平均よりも大きいことを使うと

$$|\langle \hat{C} \rangle| = \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle e^{2r} + \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle e^{-2r} \geq 2\sqrt{\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle} \quad (2.34)$$

これが、不等式 (2.31) と両立するためには等号が成立しなければならない。従って、状態  $|\Psi\rangle$  は最小不確定状態である。(2.34) で等号が成立するのは、 $\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle e^{2r} = \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle e^{-2r} = |\langle \hat{C} \rangle|/2$  の場合である。従って、最小不確定状態におけるオブザーバブル  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の分散は

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \frac{1}{2} e^{-2r} |\langle \hat{C} \rangle|, \quad \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle = \frac{1}{2} e^{2r} |\langle \hat{C} \rangle| \quad (2.35)$$

で与えられることがわかる。これから、 $|\Psi\rangle$  は  $r \rightarrow \infty$  で  $\hat{A}$  の固有状態となり、また、 $r \rightarrow -\infty$  で  $\hat{B}$  の固有状態となることがわかる。 $r \neq 0$  の場合は、 $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  の一方の揺らぎが他方の揺らぎよりも小さくなっている。

以上の結果の応用として、ハミルトニアンが

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2$$

で与えられる調和振動子を考え、位置と運動量の期待値が

$$\langle \hat{x} \rangle = x_0, \quad \langle \hat{p} \rangle = p_0 \quad (2.36)$$

で与えられる最小不確定状態が

$$\Psi(x) = \left( \frac{m\omega e^{2r}}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega e^{2r}}{2\hbar} (x-x_0)^2 + \frac{i}{\hbar} p_0 x} \quad (2.37)$$

で与えられることを示せ。また、この状態に対して位置と運動量の分散が

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} e^{-2r}, \quad \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2} e^{2r} \quad (2.38)$$

で与えられることを確かめよ。

**解答** (2.32) の演算子  $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$  に対して、それぞれ無次元化された位置と運動量演算子  $\hat{A} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}$ 、 $\hat{B} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} \hat{p}$  を当てはめると、 $[\hat{A}, \hat{B}] = i$  であり (2.32) より最小不確定状態は次の演算子の固有状態である。

$$\hat{D} = e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + i e^{-r} \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} \hat{p} = e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + e^{-r} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx}$$

( $i$ の前の符号がマイナスの場合の固有状態は存在しない。) 固有値方程式は  $\hat{D}\Psi = D\Psi$  であり、これから

$$e^{-r} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d\Psi}{dx} = \left( D - e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \Psi$$

これを積分すると

$$\Psi(x) = \Psi(0) \exp \left[ e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( Dx - \frac{e^r}{2} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x^2 \right) \right] \quad (2.39)$$

波動関数は 1 に規格化されているので

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx &= |\Psi(0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( (D + D^*)x - e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x^2 \right) \right] dx \\ &= |\Psi(0)|^2 e^{e^{2r} \frac{m\omega}{\hbar} x_0^2} \sqrt{\frac{\pi \hbar}{e^{2r} m\omega}} = 1 \end{aligned}$$

これから求められる  $\Psi(0)$  を (2.39) に代入すると

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \left( \frac{e^{2r} m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left[ \left( e^r \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x_0 + i e^{-r} \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} p_0 \right) x - \frac{e^r}{2} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{2r} m\omega}{2 \hbar} x_0^2 \right\} \\ &= \left( \frac{e^{2r} m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{e^{2r}}{2} \frac{m\omega}{\hbar} (x-x_0)^2 + \frac{i}{\hbar} p_0 x} \quad (2.40) \end{aligned}$$

(証明終わり)

## 2.5 時間とエネルギーの不確定性関係

アインシュタイン・ドブロイのもう一つの関係式  $E = \hbar\omega$  より  $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  が得られる。これから交換関係  $[\hat{E}, t] = i\hbar$  が成立するので、位置と運動量の不確定性関係 (2.8) と同様に考えて不等式

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \quad (2.41)$$

が導かれるように思われる。実は、不等式 (2.41) は成立するのだが、その解釈は位置と運動量の不確定性関係とは本質的に異なる。その理由は、古典力学と同様に量子力学においても時間は状態の変化を記述するためのパラメータに過ぎず、任意の精度で指定できることが前提とされているからである。実際、波動関数  $\Psi(x, t)$  は各時刻ごとに与えられるので時刻の揺らぎ  $\Delta t = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$  という概念は存在しない。(2.8) が位置と運動量が同時に確定した値を取りえないことを主張しているのに対して、(2.41) は、系のエネルギーは各時刻において正確に測定できるが、時間が  $\Delta t$  だけ離れた 2 回の測定によってそれぞれ正確に測定されたエネルギー  $E$  と  $E'$  の差が  $\hbar/(2\Delta t)$  程度違うことを意味してい

る。従って、エネルギーの保存は  $\Delta t$  だけ時間的に離れた 2 回の測定によって  $\hbar/(2\Delta t)$  程度の精度でしか確かめることができない。これがエネルギーと時間の不確定性関係の物理的意味である。

(2.41) を導くために系とそのエネルギーを測定する測定器を考え、それらを記述するハミルトニアンをそれぞれ  $\hat{H}_{\text{系}}$ 、 $\hat{H}_{\text{測定器}}$  と書こう。時刻  $t = 0$  以前では両者は相互作用しておらず、時刻  $t = 0$  に系のエネルギーを測定するために相互作用  $\hat{V}$  をスイッチオンし、時刻  $t = t_0 (> 0)$  において相互作用を終えらるとしよう。この間、全系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{系}} + \hat{H}_{\text{測定器}} + \hat{V} \equiv \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (2.42)$$

で与えられる。全系の状態はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \Psi(x, t) \quad (2.43)$$

に従って時間発展する。ここで相互作用表示に移って

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \Psi_I(x, t) \quad (2.44)$$

とおくと (2.43) は次のように変換される。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_I(x, t) = \hat{V}_I(t) \Psi_I(x, t), \quad \hat{V}_I(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \quad (2.45)$$

系に対する測定の反作用をできるだけ抑えるために、相互作用が小さいと仮定して (2.45) を最低次の近似で解くと

$$\Psi_I(x, t) = \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^{t_0} V_I(t) dt \right) \Psi_I(x, 0) \quad (2.46)$$

ここで、 $\Psi_I(x, 0) = \Psi(x, 0) =: \Psi_i(x)$  に注意すると、全系の波動関数がエネルギーが初期状態  $\Psi_i$  から終状態  $\Psi_f$  へと遷移する確率振幅  $a_{fi}$  は次のように与えられる。

$$a_{fi} = \int \Psi_f^*(x) \Psi_I(x, t) dx \simeq \int \Psi_f^*(x) \Psi_i(x) dx - \frac{i}{\hbar} \int dx \int_0^{t_0} dt \Psi_f^* \hat{V}_I(t) \Psi_i \quad (2.47)$$

始状態と終状態がそれぞれエネルギーが  $E_i$ 、 $E_f$  の  $\hat{H}_0$  の固有状態であるとする、右辺の第一項は  $E_f \neq E_i$  の時固有状態の直交性によりゼロとなる。

$$\begin{aligned} \int dx \Psi_f^* \hat{V}_I(t) \Psi_i &= \int dx \Psi_f^* e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \Psi_i = e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} \int dx \Psi_f^* \hat{V} \Psi_i \\ &\equiv e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} \langle f | \hat{V} | i \rangle \end{aligned}$$

となるので

$$|a_{fi}|^2 \simeq \frac{1}{\hbar^2} \left| \langle f | \hat{V} | i \rangle \int_0^{t_0} dt e^{\frac{i}{\hbar} (E_f - E_i) t} \right|^2 = 4 |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \frac{\sin^2 \frac{(E_f - E_i) t_0}{2\hbar}}{(E_f - E_i)^2} \quad (2.48)$$

この結果は、始状態と終状態のエネルギーの差  $E_f - E_i$  が (2.48) に従って分布していることを意味しており、その差の最も確からしい値は相互作用が働く時間を  $t_0$  とすると

$|E_f - E_i| \sim \hbar/t_0$  で与えられる。測定器の  $E_{f(i)}$  は始（終）状態における系と測定器を合わせた全系のエネルギーであるから、測定器のエネルギーを正確に知ることができると仮定すると、系のエネルギーは  $\hbar/t_0$  程度の精度でしか知ることができない。この結果は、系と測定器の間の相互作用の強さに依らず成立することに注意しよう。特に、相互作用時間が無限大の極限では公式

$$\delta(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \alpha t}{\pi \alpha^2 t} \quad (2.49)$$

を使うと系が状態  $i$  から  $f$  へと単位時間あたりに遷移する確率  $w_{fi}$

$$w_{fi} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|a_{fi}|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (2.50)$$

が得られる。(2.50) は**フェルミの黄金律** (Fermi's golden rule) と呼ばれる。

## 第3章

# 量子測定理論

### 3.1 古典的測定器と波束の収縮

量子系を測定する測定器の特徴は、出力（測定結果）が重ね合わせではない確定値をとることである。そのような性質を有する測定器をランダウ＝リフシッツに従って「古典的測定器」(classical apparatus) と呼ぼう\*<sup>1</sup>。測定器の始状態を  $\phi_0(\xi)$ 、測定器が取りうるさまざまな状態を  $\phi_n(\xi)$  と書こう。ここで、 $n$  は測定器の出力に対応している。量子系の初期状態を  $\psi(x)$  と書くと、全系の初期状態は  $\psi(x)\phi_0(\xi)$  と書くことができる。次に、量子系と測定器を相互作用させた後の状態を、測定器の完全系  $\{\phi_n\}$  で展開すると、全系の状態は量子系と測定器とのユニタリ相互作用によって次のように時間発展する。

$$\psi(x)\phi_0(\xi) \xrightarrow{\text{ユニタリ}} \sum_n a_n(x)\phi_n(\xi) \quad (3.1)$$

しかし、測定器の古典的性質により、測定直後の全系の状態は測定結果に対応する  $n$  の値  $n_f$  に対応する状態

$$a_{n_f}(x)\phi_{n_f}(\xi) \quad (3.2)$$

で与えられる。(3.1) の矢印の右側の重ね合わせの状態から (3.2) への変化は波束の収縮 (state reduction) と呼ばれる。量子論における測定過程は、このような非連続的な状態変化を伴うために、本質的に不可逆である。

一般に短い時間間隔において連続して同じ物理量を測定すると、結果はランダムに変化する。例外は、相互作用ハミルトニアンが座標のみに依存し運動量には依存しない場合の粒子の位置である。この時、粒子の位置は相互作用と可換になり後者の影響を受けない。

ハイゼンベルグは、波動関数は現実の存在を表しているのではなく、実験条件に従って実現される可能性の集合を表していると主張した。また、ボーアは、量子論の数学は、量子現象の統計性に関する知識を与えるアルゴリズムであると考えた (N. Bohr, 1961)。

アインシュタインは、「神はサイコロを振り給わず」という有名な言葉通り、量子力学を現存する最良の理論と認めつつも、これを最終的な理論として受け入れることは終生拒

\*<sup>1</sup> 数学的には、「古典的測定器」とは、出力変数が古典的な確率変数になるものとして定義される。

否した。これに対して、ボーアをはじめとする人々は、「測定が行われるまでは実在というものを考えてはいけない、確率振幅という情報のみが存在する」と主張した。これを、**コペンハーゲン解釈** (Copenhagen interpretation) と言う。

粒子の波動関数は観測するまでは広がっているが、観測するとその直後の粒子の位置は測定精度の範囲で空間のある一点に定まる。これは、あたかも観測によって波動関数その点に収縮したように思えるので観測による**波束の収縮**と呼ばれる。しかし、コペンハーゲン解釈に従えば、波動関数は実在の波ではなく確率振幅という情報を記述しているものなので、波束の収縮は粒子の存在に関する我々の不確かな知識が観測行為の結果、より確実なものになったという事実を述べているのであり、実在の波が収縮するとは考えてはいけない。

### 3.2 フォン・ノイマンの理論

フォン・ノイマンは量子と古典の世界の間に人為的な 'cut' を導入することを要請した。そして、古典的測定器の読み出し値  $n$  に対応して、量子系の波動関数が  $\psi = \sum_n c_n \psi_n$  から  $\psi_n$  へと不連続な変化（波束が収縮）が起こることを仮定した。そのようなプロセスはシュレーディンガー方程式では記述できない非ユニタリーな状態変化である。しかも、そのような cut の位置は被測定系から観測者の脳の間任意に設定できてしまう。

今、被測定系の波動関数を  $\sum_n c_n \psi_n(x)$ 、測定器の波動関数を  $\phi_0(y)$  と書くと、全系の初期状態の波動関数は次のように書ける。

$$\Psi_0 = \phi_0(y) \sum_n c_n \psi_n(x) \quad (3.3)$$

ここで、 $\psi_n$  としては被測定系のオブザーバブル  $O$  の固有状態を選ぼう。

$$O\psi_n = O_n\psi_n \quad (3.4)$$

また、一般の時刻の波動関数は次のように展開できる。

$$\Psi(t; x, y) = \sum_n \phi^{(n)}(t; y) \psi_n(x) \quad (3.5)$$

次に、測定を開始する。被測定系と測定器との相互作用ハミルトニアンとして次のものを選ぶ。

$$H_I = \lambda O p_y = -i\hbar\lambda O \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.6)$$

ここで、相互作用が被測定系や測定器の自由ハミルトニアンに比べて十分に強いと仮定する (impulsive measurement)。この時、 $H \simeq H_I$  と近似でき、測定過程のシュレーディンガー方程式は次のように書ける。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H_I \Psi = -i\hbar\lambda O \frac{\partial}{\partial y} \Psi \quad (3.7)$$



両辺に (3.5) を代入して、(3.4) を用いると

$$\sum_n \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial t} \psi_n = -\lambda \sum_n O_n \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial y} \psi_n \quad (3.8)$$

各  $\psi_n$  は互いに直交しているので

$$\frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial t} = -\lambda O_n \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial y} \quad (3.9)$$

視察により解は  $\phi^{(n)}(t; y) = \phi^{(n)}(0; y - \lambda O_n t)$ 。初期状態に関する仮定から  $\phi^{(n)}(0; y) = c_n \phi_0(y)$  である。

よって、相互作用時間  $t = \Delta t$  後の全系の波動関数は

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n \phi_0(y - \lambda O_n \Delta t) \quad (3.10)$$

で与えられることがわかる。相互作用時間は

$$\lambda \Delta t \Delta O_n \gg 1 \quad (3.11)$$

が満足されるように選ばれる。ここで  $\Delta O_n$  は固有値  $O_n$  の平均間隔である。条件 (3.11) は、異なった固有値が測定器の出力において識別できるための条件である。この時、各  $\phi_0(y - \lambda O_n \Delta t)$  に対して、被測定系の波動関数  $\psi_n$  が対応する。相互作用の後に、 $y$  の値を観測することにより、全波動関数  $\Psi$  は重ね合わせの状態 (3.10) から特定の成分  $\psi_n \phi_0(y - \lambda O_n \Delta t)$  へと波束の収縮が起こる。そして、そのような事象がおこる確率は  $|c_n|^2$  で与えられる。この確率は、被測定系の始状態に現れる係数  $c_n$  から得られるものと一致している。

コペンハーゲン解釈のアキレス腱は、フォン・ノイマンが指摘したように測定される系と測定器、ひいては観測者の間に明瞭な境界線を引くことができないことである。これは、波束の収縮がどこで起こるのかが原理的に決められず、我々が観測結果を認識した時に波束の収縮がおこるのだという極論にまで行き着く。コペンハーゲン解釈は、測定結果を確定させる (あるいは波束を収縮させる) 役割をもつ古典的測定器の存在を前提としており、観測結果を解釈するというまさに最終段階で古典論の助けを必要としているといえる。このことは、我々自身がその一部分である宇宙の量子力学的状態を議論する際には原理的な困難となるかもしれない。

通常、一般化された理論は (一般化される前の) 元の理論の助けを借りることなく首尾一貫している。しかし、量子論は波動関数を解釈する上で出力が古典確率論に従う古典的測定器が必要なので、量子論は古典論とは独立な理論体系であるとはいえない。ただし、これは量子論が内部矛盾を含んでいることは意味しない。コペンハーゲン解釈は、このように微妙な問題点を含んでいるものの実用上有効であり、量子力学の標準的な解釈となっている。

### 3.3 多世界解釈

コペンハーゲン解釈は、観測過程を記述するために、次の二つの仮定をしている。

- (1) 波束の収縮 (古典的測定器の存在)
- (2) ボルンの確率公理 (確率解釈)

これらを仮定することなく、シュレーディンガー方程式だけで観測過程を記述するために、エベレットは**多世界解釈** (many-world interpretation) と呼ばれる観測過程の解釈を提案した<sup>\*2</sup>。それによると、観測対象も測定器もそれを認識する観測者もシュレーディンガー方程式と波動関数で記述されるものとする。従って、波束の収縮は起こらない。さらに、確率振幅の絶対値の自乗を観測者がそれぞれの事象を観測する頻度に比例する量、すなわち、相対頻度に比例することを「導く」ことができる。

簡単のため、系が取りうる状態が  $\phi$  と  $\psi$  の二つだけであると仮定し、同じ波動関数

$$\Phi_i = \alpha\phi_i + \beta\psi_i, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.12)$$

で与えられる  $N$  個の系を考えよう。全系の波動関数はこれらのテンソル積で与えられる。

$$\Psi = \prod_{i=1}^N (\alpha\phi_i + \beta\psi_i) \quad (3.13)$$

右辺を展開すると  $2^N$  個の項が現れる。このうち、 $\phi$  が  $n$  回現れる状態は  ${}_N C_n$  個あり、これらを集めると

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{{}_N C_n}} (\phi_1 \cdots \phi_n \psi_{n+1} \cdots \psi_N + \cdots + \psi_1 \cdots \psi_{N-n} \phi_{N-n+1} \cdots \phi_N) \quad (3.14)$$

右辺の係数は波動関数が 1 に規格化されるように決められた。この状態を用いて (3.13) を展開すると

$$\Psi = \sum_{n=0}^N c(n) \Psi_n, \quad c(n) = \alpha^n \beta^{N-n} \sqrt{{}_N C_n} \quad (3.15)$$

が得られる。これから、簡単な計算により

$$\sum_{n=0}^N \left( |\alpha|^2 - \frac{n}{N} \right)^2 |c(n)|^2 = \frac{|\alpha|^2 |\beta|^2}{N} \quad (3.16)$$

が得られるが、右辺は  $N \rightarrow \infty$  で 0 となる。これと

$$\sum_{n=0}^N |c(n)|^2 = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^N = 1 \quad (3.17)$$

<sup>\*2</sup> H. Everett III, "Relative State" Formulation of Quantum Mechanics, Rev. Mod. Phys. **29**, 454 (1957); R. Omnès, Consistent interpretations of quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. **64**, 339 (1992).

から次の結果が導かれる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |c(n)|^2 = \begin{cases} 1 & (n = N|\alpha|^2) \\ 0 & (n \neq N|\alpha|^2) \end{cases} \quad (3.18)$$

ボルンの確率公理によると、状態  $\phi$  が観測される確率は  $|\alpha|^2$  で与えられる。多世界解釈ではこの  $|\alpha|^2$  という量が、状態  $\phi$  が全系の波動関数の中に現れる相対頻度  $n/N$  の  $N \rightarrow \infty$  の極限として現れる。また、この議論においては波束の収縮という概念が用いられておらず、可能なすべての状態が共存している。

このように多世界解釈は、コペンハーゲン解釈において仮定された波束の収縮を必要とせず、また、確率公理を“定理”として導けるという利点を持っている。他方、全系をシュレーディンガー方程式に従って時間発展させると、複数の観測結果に対応して、観測者の意識もまた重ね合わせの状態にならざるをえない。これを理解するために、簡単のため測定対象の量子状態が  $|0\rangle$  と  $|1\rangle$  の二種類しかない場合を考えると、全系の状態は理想的には次のような重ね合わせの状態になる。

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & \alpha|0\rangle | \text{測定器の状態: } 0 \rangle | \text{測定器の針が } 0 \text{ であることを認識している観測者の状態} \rangle \\ & + \beta|1\rangle | \text{測定器の状態: } 1 \rangle | \text{測定器の針が } 1 \text{ であることを認識している観測者の状態} \rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

このように観測者の意識が観測過程において重ね合わせの状態へ分岐するという帰結は、我々の常識と相反するが、それが論理的矛盾を引き起こさないようにできているところがこの理論の巧妙な点である。その理由は、シュレーディンガー方程式の線形性のために重ね合わされている状態が独立に存在でき、従って、それらの状態間の情報のやり取りができない、すなわち、分岐した相手の存在を認識することができないからである。このことが多世界解釈の無矛盾性を保証している。

### 3.4 密度演算子

密度演算子は量子力学に内在する不確定性と原理的には知り得る知識が不足していることから生じる不確実性を統一的に扱うことを可能にする。

量子力学において、考えている系に対する完全な情報は波動関数または状態ベクトル  $|\Psi\rangle$  で与えられる。このとき系は**純粋状態** (pure state) にあるといい、これに対応する密度演算子は

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (3.20)$$

と定義される。純粋状態の密度演算子は条件

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad (3.21)$$

を満足する。これを**冪等条件** (idempotency condition) という。逆に、冪等条件が満足されているとき、状態は純粋状態にある。

次に、我々が対象に関する完全な情報を持っておらず、互いに直交する状態  $\{|n\rangle\}$  のうちで、系が  $n$  番目にある確率が  $p_n$  で与えられることを知っている場合を考える。この場合、密度行列は

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle\langle n| \quad (3.22)$$

で与えられる。このとき

$$\hat{\rho}^2 = \sum_n p_n^2 |n\rangle\langle n| \quad (3.23)$$

となるので、任意の状態  $|\Psi\rangle$  に対して  $\langle\Psi|\hat{\rho}^2|\Psi\rangle \leq \langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle$  である。ここで等号を除く不等号を満足する系は**混合状態** (mixed state) にあるという。

逆に、密度演算子  $\hat{\rho}$  が与えられたとき、系が状態  $|n\rangle$  にある確率は (3.22) から

$$p_n = \langle n|\hat{\rho}|n\rangle \quad (3.24)$$

で与えられることがわかる。直交するすべての可能な状態の確率の和は1に等しくなければならないので

$$\sum_n p_n = \sum_n \langle n|\hat{\rho}|n\rangle \equiv \text{Tr}\hat{\rho} = 1 \quad (3.25)$$

が得られる。ここで、 $\text{Tr}$  は**トレース** (trace) と呼ばれる演算で、任意の演算子  $\hat{O}$  に対して、規格直交完全系をなす任意の基底  $\{|n\rangle\}$  を用いて

$$\text{Tr}\hat{O} := \sum_n \langle n|\hat{O}|n\rangle \quad (3.26)$$

で定義される。右辺は任意の完全規格直交系  $\{|n\rangle\}$  に対して同じ値をとる。

トレースの特徴は特定の基底  $\{|n\rangle\}$  によらない値を取ることである。トレースのもう一つの重要な性質は**循環性** (cyclic property) である。すなわち、任意の演算子  $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ 、 $\hat{C}$  に対して

$$\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \text{Tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A}) \quad (3.27)$$

が成立する。

密度演算子とトレースを用いると、様々な量を特定の基底によらない形で表現できる。例えば、一般のオブザーバブル  $\hat{O}$  の期待値は

$$\langle\hat{O}\rangle \equiv \sum_n p_n \langle n|\hat{O}|n\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) \quad (3.28)$$

と書ける。

### 3.5 還元密度演算子

全系が A と B の二つの部分から成り立っている場合を考える。全系の密度演算子を  $\hat{\rho}^{A+B}$  と書こう。これが密度演算子であるための条件は正值性（固有値が非負）とトレースが 1 であるという条件である。まず、正值性から  $\hat{\rho}^{A+B}$  を対角化する表示が存在して、対角成分は非負である。すなわち、

$$\hat{\rho}^{A+B} = \sum_n p_n |\Psi_n\rangle_{A+BA+B} \langle \Psi_n| \quad (3.29)$$

全系の状態を知る必要はなく、系 A の状態だけに関心がある場合を考えよう。このとき、系 B についてのみトレースをとることによって、部分系 A の密度演算子を得ることができる。系 B の完全系  $\{|m\rangle_B\}$  を用いると

$$\hat{\rho}^A \equiv \text{Tr}_B(\hat{\rho}^{A+B}) = \sum_n p_n \sum_m {}_B\langle m|\Psi_n\rangle_{A+BA+B} \langle \Psi_n|m\rangle_B \quad (3.30)$$

がえられる。ここで、 $\text{Tr}_B$  は系 B に対してのみトレースをとることを意味する。 $\hat{\rho}^A$  を系 A に対する還元密度演算子 (reduced density operator) という。系 A だけに関係する物理量  $\hat{O}^A$  を問題にする限り  $\hat{\rho}^A$  と  $\hat{\rho}$  のいずれを用いて計算しても同じ結果が得られる。すなわち、

$$\text{Tr}_A(\hat{\rho}^A \hat{O}^A) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}^A) \quad (3.31)$$

### 3.6 測定の理論

最近の物理学の進展により、光子や原子の量子状態を 1 個あるいは数個のレベルで人工制御することが可能になっている。その際に使われる基本的な手法は観測による波束の収縮である。従って、少数の量子を人工制御する上で測定行為によって量子状態がどのように変化するかを理解することが不可欠となっている。

いわゆる観測の理論は波束の収縮の起源を議論するが、これは本節の主題ではない。ここでは波束の収縮が起こることは認めて、ある事象が観測される確率とその直後の量子状態を記述する測定の理論について述べる。測定の理論としては、フォンノイマンによる射影仮説 (projection postulate) に基づく理論が有名であるが、この理論が適用できない実例が数多く存在する。以下に述べる理論は量子情報や量子光学分野で標準的に用いられている操作的量子測定理論 (operational quantum measurement theory) である。これは、特別な場合として射影仮説 (projection postulate) に基づくフォンノイマンの測定理論を含んでいる。

量子力学的測定はそれが行われる時刻から見て過去に対する役割と未来に対する役割が全く異なっている。過去に対する役割、同じ量子状態に用意されたアンサンブルに対して

測定を繰り返すことにより、量子論で予言された確率分布が再現されるかどうかを確かめることである。未来に対する役割は、各々の測定結果に対する測定直後の量子状態を与えることである。シュレーディンガー方程式は時間反転に対して対称であるが、測定過程におけるこの非対称性のためにある測定が行われた時点の以前と以後は時間反転対称性が破れている。

操作的測定理論によると、測定過程は測定演算子と呼ばれる線形演算子の集合  $\{\hat{A}_m\}$  で記述される。ここで、 $m$  は測定値を表すものとする。測定演算子は次の二つの事柄を記述する。

- 状態  $|\Phi\rangle$  に対して測定値  $m$  が観測される確率  $P(m)$  は

$$P(m) = \|\hat{A}_m|\Phi\rangle\|^2 = \langle\Phi|\hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m|\Phi\rangle \quad (3.32)$$

で与えられる。

- 測定直後の状態  $|\Phi'\rangle$  は

$$|\Phi'\rangle = \frac{\hat{A}_m|\Phi\rangle}{\|\hat{A}_m|\Phi\rangle\|} = \frac{\hat{A}_m|\Phi\rangle}{\sqrt{\langle\Phi|\hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m|\Phi\rangle}} \quad (3.33)$$

で与えられる。

すべての測定値に対する確率の和は1でなければならないので

$$\sum_m P(m) = \sum_m \langle\Phi|\hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m|\Phi\rangle = \langle\Phi|\sum_m \hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m|\Phi\rangle = 1 \quad (3.34)$$

これが任意の規格化された状態  $|\Phi\rangle$  に対して成立するためには測定演算子は完全性条件

$$\sum_m \hat{A}_m^\dagger\hat{A}_m = \hat{I} \quad (3.35)$$

を満足しなければならない。ここで  $\hat{I}$  は恒等演算子である。

具体例として、光子を1個ずつ検出するフォトンカウンターと呼ばれ測定器を用いた光子数の測定を考えよう。光子数が  $n$  個の光子数状態  $|n\rangle$  に対してある短い時間  $dt$  測定すると、測定結果は光子が全く検出されないか1個検出されるかのいずれかである(測定時間  $dt$  は、その間に光子が2個以上検出される確率が無視できるくらい短くとする)。時間  $dt$  の間に光子が0個、1個検出される場合に対応する測定演算子を  $\hat{A}_0$ 、 $\hat{A}_1$  とする。光子が1個検出されると、残りの状態は光子数が1個少ない状態  $|n-1\rangle$  となるはずである。従って、 $\hat{A}_1$  は光子の消滅演算子  $\hat{a}$  に比例すると考えられるので

$$\hat{A}_1 = \sqrt{\lambda dt} \hat{a} \quad (3.36)$$

とおこう。ここで、 $\lambda$  は測定器と光子との結合の強さを特徴づける定数である。実際、このとき光子を1個を検出する確率は(3.32)より

$$P(1) = \langle n|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|n\rangle = \lambda ndt \quad (3.37)$$

となり、光子数  $n$  と測定時間  $dt$  に比例するという直観と合致する結果が得られる。光子が観測されない場合の測定演算子  $\hat{A}_0$  は条件 (3.35) を満足するように決められる。 $(dt)^2$  のオーダーの項を無視すると

$$\hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 = \hat{I} - \lambda \hat{a}^\dagger \hat{a} dt = \exp(-\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a} dt) \quad (3.38)$$

これから

$$\hat{A}_0 = \exp(i\hat{h}) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} dt\right) \quad (3.39)$$

が得られる。ここで、 $\hat{h}$  は測定器のスイッチをオフした場合 ( $\lambda = 0$ ) に状態が自由場のハミルトニアン  $\hat{H}_0 = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$  ( $\omega$  は光子の周波数) にしたがって時間発展するという条件から  $\hat{h} = -\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} dt$  が得られる。

### 3.7 射影測定

測定値  $m$  が測定したいオブザーバブル  $\hat{O}$  の固有状態  $|m\rangle$  に対応する固有値である場合、演算子  $\hat{A}_m$  として射影演算子 (projection operator)

$$\hat{A}_m = |m\rangle\langle m| \quad (3.40)$$

をとることができる。このクラスに属する測定は射影測定 (projective measurement) と呼ばれる。このとき (3.32)、(3.33) はそれぞれ

$$P(m) = |\langle m|\Phi\rangle|^2 \quad (3.41)$$

$$|\Phi'\rangle = |m\rangle \quad (3.42)$$

となる。射影測定の場合、測定直後の状態は観測された測定値に対応する固有状態となっている。また、(3.41) はボルンの確率解釈に他ならない。

条件 (3.35) は

$$\sum_m |m\rangle\langle m| = \hat{I} \quad (3.43)$$

となる。これはオブザーバブルの固有状態が満足すべき完全性条件に他ならない。さらに、オブザーバブル  $\hat{O}$  は次のようにスペクトル分解できる。

$$\hat{O} = \sum_m m |m\rangle\langle m| \quad (3.44)$$

具体例として、スピン 1/2 のスピンを  $z$  軸方向に沿って測定することを考えよう。オブザーバブルとしてパウリ行列の  $z$  成分  $\hat{\sigma}_z$  を考えると、測定値は  $m = +1$  と  $m = -1$  の 2 通りである。これらの測定値は、それぞれ上向きスピンと下向きスピンの固有状態  $|\uparrow\rangle$ 、 $|\downarrow\rangle$  に対応しているので、(3.40) に従って

$$\hat{A}_1 = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|, \quad \hat{A}_{-1} = |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (3.45)$$

が得られる。これらは完全性の条件 (3.35)

$$\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \hat{A}_{-1}^\dagger \hat{A}_{-1} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = \hat{I} \quad (3.46)$$

を満足しており、また、(3.44) のスペクトル分解は次式で与えられる。

$$\hat{\sigma}_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (3.47)$$

これはパウリ行列の  $z$  成分に他ならない。

### 3.8 POVM 測定

測定直後の系の状態には関心がなく、測定値  $m$  が得られる確率 (3.32) にのみ興味がある場合、 $\hat{A}_m$  の代わりに

$$\hat{M}_m \equiv \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m \quad (3.48)$$

を用いるのが便利である。この演算子は、任意の状態  $|\Phi\rangle$  に対して期待値が

$$\langle\Phi|\hat{M}_m|\Phi\rangle = \|\hat{A}_m|\Phi\rangle\|^2 \geq 0 \quad (3.49)$$

のようにゼロまたは正となる。任意の状態に対する期待値が負とされない演算子を**正演算子** (positive operator) という。測定モデルが正演算子の集合  $\{\hat{M}_m\}$  から構成される時、 $\{\hat{M}_m\}$  を**正演算子値測度** (positive operator-valued measure)、略して POVM という。

### 3.9 グリーソンの定理

1957年にグリーソンは3次元以上のヒルベルト空間に射影演算子を用いて導入可能な確率測度が  $\mu(a) = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_a)$  の形をとることを示した<sup>\*3</sup>。ここで、 $\hat{\rho}$ は密度演算子(3.4節参照)、 $\hat{P}_a$ は測定値  $a$  に対応する射影演算子である。2次元を含む一般的な場合についての証明は正演算子値測度を用いて2003年にブッシュによってなされた<sup>\*4</sup>。こうしてボルの確率公理はヒルベルト空間の性質(具体的には完全系をなす正規直交基底が存在すること)の帰結(定理)となった。(さらに進んだ注釈: ヒルベルト空間が3次元以上の場合に成立する Bell-Kochen-Specker の定理<sup>\*5</sup>はグリーソンの定理の系とみなすことができる。)

<sup>\*3</sup> A. M. Gleason, J. Math. Mech. **6**, 885 (1957)

<sup>\*4</sup> P. Bush, Phys. Rev. Lett. **91**, 120403 (2003)

<sup>\*5</sup> A. Peres, J. Phys. A: Mathematical and General. **24**, L175 (1991).



## 第 4 章

# 電磁場の量子化

### 4.1 マックスウェル方程式

電荷密度と電流密度がそれぞれ  $\rho$ 、 $\mathbf{j}$  で与えられる真空中の電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  は次のマックスウェル方程式に従う。

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday の電磁誘導の法則}) \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\text{rot}\mathbf{B} = \epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (\text{Ampère - Maxwell の法則}) \quad (4.2)$$

$$\epsilon_0\text{div}\mathbf{E} = \rho \quad (\text{電場に関する Gauss の法則}) \quad (4.3)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁場に関する Gauss の法則}) \quad (4.4)$$

ここで、 $\epsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2) = 8.85 \times 10^{-12}\text{F/m}$ 、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H/m}$  はそれぞれ真空の誘電率と透磁率を表す。(4.3) 式と比較して (4.4) 式の右辺が 0 なのは、電子に相当する磁気単極子が自然界に存在しないという経験事実を表している。このため (4.1) 式の右辺には (4.2) 式の電流密度  $\mathbf{j}$  に相当する磁化密度の流れの項が存在しない。

(4.4) 式をベクトル解析の公式

$$\text{divrot}\mathbf{A} = 0 \quad (4.5)$$

と比較すると  $\mathbf{B}$  があるベクトル  $\mathbf{A}$  を用いて

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (4.6)$$

と書けることがわかる。 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルと呼ばれる。これを (4.1) に代入すると

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

が得られる。これをベクトル解析の公式

$$\text{rotgrad}\phi = 0 \quad (4.7)$$

と比較すると、 $\mathbf{E}$  が

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.8)$$

のように書けることがわかる。 $\phi$  はスカラーポテンシャルと呼ばれる。従って  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  は  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  を与えれば決まる。

$\phi$  と  $\mathbf{A}$  を決定する方程式は (4.6) 式と (4.8) 式をマックスウェル方程式の残りの式 (4.2) と (4.3) に代入することで得られる。まず、(4.2) 式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\text{rot rot} \mathbf{A}}_{\text{grad div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}} &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{grad} \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \mathbf{j} \\ \rightarrow \text{grad div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} + \overbrace{\epsilon_0 \mu_0}^{c^{-2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \phi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

すなわち

$$\text{grad div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \phi = \mu_0 \mathbf{j} \quad (4.9)$$

ここで、 $c := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  は光速である。他方、(4.8) 式を (4.3) 式に代入すると

$$-\epsilon_0 \Delta \phi - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} = \rho \quad (4.10)$$

(4.9) 式と (4.10) 式が  $\mathbf{A}$  と  $\phi$  を決める方程式である。これらから  $\mathbf{j}$  と  $\rho$  は独立ではなく、次の方程式を満たすことがわかる。

$$\text{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.11)$$

この方程式は、**連続の方程式** (equation of continuity) とよばれ、電荷の保存則を表している。(4.11) 式は (4.9) と (4.10) を用いて示すこともできるが、(4.2) 式から直接示すこともできる。

$$\text{div} \mathbf{j} = \text{div} \left( \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\epsilon_0 \text{div} \mathbf{E})}_{\stackrel{(4.3)}{=} \rho} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## 4.2 ゲージ不変性

電流密度  $\mathbf{j}$  と電荷密度  $\rho$  を与えても、(4.9) 式と (4.10) 式だけからでは  $\mathbf{A}$  と  $\phi$  は一意に定まらない。実際、 $\mathbf{A}_0$  と  $\phi_0$  が (4.9) 式と (4.10) 式の解とすると、 $\chi$  を任意の関数として

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \text{grad} \chi, \quad \phi = \phi_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (4.12)$$

も解となっている。(4.12) 式で与えられる変換を**ゲージ変換** (gauge transformation) という。(4.6) 式と (4.8) 式で与えられる  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{E}$  はゲージ変換に対して不変である。

ゲージ変換の自由度を利用すれば、電磁ポテンシャルを決定する方程式 (4.9)、(4.10) を簡単化することができる。任意のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$  に対してゲージ関数  $\chi(\mathbf{r})$  を

$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

と選ぶ。公式

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

を用いると

$$\Delta \chi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \overbrace{\left( \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)}^{-4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \text{div} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\text{div} \mathbf{A}_0(\mathbf{r})$$

が成立することがわかる。このとき、ゲージ変換 (4.12) された  $\mathbf{A}$  は次の条件を満足する。

$$\text{div} \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A}_0 + \overbrace{\text{div} \text{grad} \chi}^{\Delta \chi = -\text{div} \mathbf{A}_0} = 0 \quad (\text{クーロンゲージ}) \quad (4.13)$$

ベクトルポテンシャルが (4.13) 式を満足するようなゲージを**クーロンゲージ** (Coulomb gauge) と呼ぶ。条件 (4.13) は  $\mathbf{A}$  が横波であることを示している。実際、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

とフーリエ展開すると

$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0$$

これが任意の  $\mathbf{r}$  に対して成立するためには  $\mathbf{k} \perp \mathbf{A}_{\mathbf{k}}$  が成り立つ必要がある。従って、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は、そのフーリエ成分が波数ベクトルに垂直な横波であることがわかる。同様に、(4.4) 式から  $\mathbf{B}$  が横波であることがわかる。

(4.13) 式を (4.9) 式と (4.10) 式に代入すると

$$-\Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \phi = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (4.14)$$

$$-\epsilon_0 \Delta \phi = \rho \quad (4.15)$$

**ポアソン方程式** (Poisson equation) (4.15) は直ちに積分できて

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (4.16)$$

が得られる。

(4.14) 式の解  $\mathbf{A}$  を求めるために次の事実注目する。まず、左辺の第一項と第二項はクーロンゲージでは横波成分しか持たない。他方、第三項は縦波成分だけを含む。これは、 $\phi(\mathbf{r}, t)$  をフーリエ変換することにより理解できる。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rightarrow \text{grad}\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \underbrace{i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}}}_{\text{縦波}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.17)$$

従って、 $\mathbf{j}$  を波数  $\mathbf{k}$  に平行な縦波 (Longitudinal wave) 成分  $\mathbf{j}_L$  と垂直な横波 (Transverse wave, 横波) 成分  $\mathbf{j}_T$  に分解し、前者を (4.14) 式の左辺の最初に2つの項に、後者を第3項に等しいとおくことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{j}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{(\mathbf{j}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k})}{k^2} \mathbf{k} + \left( \mathbf{j}_{\mathbf{k}} - \frac{(\mathbf{j}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k})}{k^2} \mathbf{k} \right) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_T(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

ここで、

$$\mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{j}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k})}{k^2} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{j}_T(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \mathbf{j}_{\mathbf{k}} - \frac{(\mathbf{j}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k})}{k^2} \mathbf{k} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

と分解すると、

$$-\Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{j}_T(\mathbf{r}) \quad \leftarrow \text{横波成分} \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\phi = \mu_0 \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t) \quad \text{or} \quad \mathbf{j}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\phi(\mathbf{r}, t) \quad \leftarrow \text{縦波成分} \quad (4.20)$$

が得られる。(4.19) 式の解は、次のように与えられる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_T(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (4.21)$$

(4.21) が (4.19) の解になっていることは  $t'$  が時間だけでなく空間座標にも依存していることに注意することで示すことができる。

電場も同様に  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_T$  のように縦波成分  $\mathbf{E}_L$  と横波成分  $\mathbf{E}_T$  に分解すると (4.8) 式で  $\text{grad}\phi$  が縦波 [(4.17) 式を見よ]、 $\mathbf{A}$  が横波だから

$$\mathbf{E}_L = -\text{grad}\phi, \quad \mathbf{E}_T = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.22)$$

(4.20) 式より

$$\mathbf{j}_L = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\phi = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} \quad (4.23)$$

右辺は変位電流であり、これが電流の縦波成分を与えていることがわかる。 $\rho$  から (4.16) 式を通じて  $\phi$  が求まり、 $\mathbf{j}_T$  から (4.21) 式を通じて  $\mathbf{A}$  が求まる。 $\mathbf{j}_L$  は (4.23) より  $\phi$  がわかれば求まり、 $\phi$  は (4.16) から  $\rho$  がわかれば決まる。(4.23) 式の両辺に  $\text{div}$  を作用させると、 $\text{div}\mathbf{j}_L = \text{div}\mathbf{j}$  および (4.15) 式から、連続の方程式 (4.11) に帰着する。

以上の結果をまとめると、クーロンゲージでは、電磁場の縦波成分は電荷密度に関係した量 ( $\mathbf{E}_L$ ,  $\mathbf{j}_L$ ,  $\rho$ ) を記述し、スカラーポテンシャル  $\phi$  で表される。他方、電磁場の横波成分は電磁波に関係した量 ( $\mathbf{E}_T$ ,  $\mathbf{j}_T$ ,  $\mathbf{B}$ ) を記述し、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  で表される。

### 4.3 アハラノフーボーム効果

電磁ポテンシャル  $\mathbf{A}$ 、 $\phi$  はゲージ変換の任意性を持っているために、古典電磁気学では電場と磁場がより基本的な物理量であり、電磁ポテンシャルはそれらを与える便宜的なものであると考えられてきた。しかし、この事情は量子論においては一変する。電荷  $q$  の電磁場中の運動を記述する古典ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + V(\mathbf{r}) + q\phi(\mathbf{r}, t) \quad (4.24)$$

で与えられる。量子化の手続きにより、対応するシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + V(\mathbf{r}) + q\phi(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (4.25)$$

となる。このように量子力学ではベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  が通常のポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  と同様に波動関数を決定する方程式に直接現れる。いま、与えられた電磁ポテンシャル  $\mathbf{A}$ 、 $\phi$  に対して、シュレーディンガー方程式 (4.25) の解  $\Psi$  がわかっているとすると、このとき、電磁ポテンシャルをゲージ変換

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \text{grad}\chi, \quad \phi = \phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (4.26)$$

してもシュレーディンガー方程式 (4.25) の形が不変であるためには、波動関数を同時に次のように変換する必要がある。

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} q\chi(\mathbf{r}, t)\right) \quad (4.27)$$

(4.27) は波動関数の位相がゲージ関数  $\chi$  に依存していることを示している。

電磁ポテンシャルが時間に陽に依存しない定常状態を考えよう。このときシュレーディンガー方程式は

$$E\Psi(\mathbf{r}) = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + V(\mathbf{r}) + q\phi(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) \quad (4.28)$$

と書ける。波動関数にユニタリー変換

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} q \int^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right) \quad (4.29)$$

を施すと、シュレーディンガー方程式 (4.28) からベクトルポテンシャルを消去することができる。このとき、波動関数はベクトルポテンシャルに陽に依存する。アハラノフとボームはこの依存性が観測にかかる効果を導くことを示した。いま、図 8.1 のような 2 次元平面上に 1 次元のリングを考え、リングの中心を磁束  $\Phi$  が貫いている状況を考えよう。ここでは磁束が存在する領域をリングの中心付近だけに局在させればリング上にある荷電粒子は磁束から直接力を受けない。

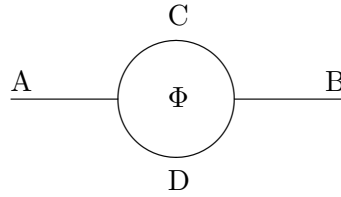


図 4.1 アハラノフ・ボーム効果

電流が A 点から B 点へ流れる状況を考えると、経路 ACB をたどった電子の B 点での確率振幅は

$$\Psi_1 = \Psi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}q \int_{ACB} \mathbf{A}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) \quad (4.30)$$

経路 ADB をたどった電子の B 点での確率振幅は

$$\Psi_2 = \Psi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}q \int_{ADB} \mathbf{A}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) \quad (4.31)$$

ここで、リングは対称に作られているとして、 $|\Psi_1| = |\Psi_2| =: |\Psi_0|$  とした。このとき、B 点で電子が見出される確率は次の量に比例する。

$$\begin{aligned} |\Psi_1 + \Psi_2|^2 &= |\Psi_0|^2 \left| \exp\left(\frac{i}{\hbar}q \int_{ACB} \mathbf{A}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) + \exp\left(\frac{i}{\hbar}q \int_{ADB} \mathbf{A}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) \right|^2 \\ &= |\Psi_0|^2 \left| 1 + \exp\left(\frac{i}{\hbar}q \oint_{\text{ring}} \mathbf{A}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) \right|^2 \\ &= 2|\Psi_0|^2 \left(1 + \cos\left(\frac{q}{\hbar}\Phi\right)\right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

ここで、 $\Phi$  はベクトルポテンシャルをリングに沿って線積分した量

$$\Phi \equiv \oint_{\text{ring}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \quad (4.33)$$

として定義される。ストークスの定理により  $\Phi$  は

$$\Phi \equiv \oint_{\text{ring}} \mathbf{A}d\mathbf{x} = \int_{\text{ring}} \text{rot}\mathbf{A}d\vec{S} = \int_{\text{ring}} \mathbf{B}d\vec{S} \quad (4.34)$$

のように磁場の面積分として書ける。ここで、 $\oint_{\text{ring}} \cdots d\mathbf{r}$  はリングに沿った線積分、 $\int_{\text{ring}} \cdots d\vec{S}$  はリングの内側の領域での面積分を表している。(4.34) から  $\Phi$  はゲージ変換に対して不変な磁場の積分として表されるので、ゲージ不変な物理量であることがわかる。このように、ベクトルポテンシャルそれ自体はゲージ変換によって変化するが、観測量である磁束はリングに沿ったベクトルポテンシャルの線積分として与えられるのでゲージ変換に対して不変である。(4.32) はリングを通過する電流がそれを貫く磁束の関数として振動することを示している。これをアハラノフ・ボーム効果 (Aharonov-Bohm effect) という。

点 A から点 B に至る確率振幅が、(4.30) と (4.31) のように経路に依存する 2 種類の関数で記述されていることに注意しよう。これはシュレーディンガー方程式 (4.28) を積分

した値が、位置の関数として一意ではないことを示唆している。この理由は、図 4.1 のようにループの中に磁束が存在する場合は、ベクトルポテンシャルがループの内側で発散することに由来する。実際、(4.33) の積分を半径  $r$  の円周に沿て行くと、

$$\Phi = 2\pi r A(r) \longrightarrow A(r) = \frac{\Phi}{2\pi r} \quad (4.35)$$

となり、ベクトルポテンシャルは  $r = 0$  で発散する。このために空間が単連結ではなくなり、ベクトルポテンシャルの線積分で与えられる位相の値が発散する特異点のどちら側の経路をとるかに依存するようになるのである。その結果、点 A から点 B へ移動する確率振幅は経路に依存する。

古典電磁気学では荷電粒子はローレンツ力

$$\vec{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.36)$$

により電荷が存在する場所における電場と磁場から直接力を受ける。ところが、量子論では、たとえ電荷が運動する領域に電場や磁場が存在しなくてもアハラノフ-ボーム効果によって波動関数の位相が (4.29) 式のように変化する。いま、一周の長さが  $L$  の 1 次元のリングを考え、リングの中心を磁束  $\Phi$  が貫いている状況を考えよう。ここでは (4.32) の場合と異なり、電流は流れていないとする。磁束が存在する領域をリングの中心付近だけに局在させればリング上にある荷電粒子は磁束から直接力を受けることはないが、アハラノフ-ボーム効果によって電荷はリングを一周すると位相が  $\phi$  だけ変化する。

$$\Psi(x + L) = \Psi(x)e^{i\phi}, \quad \phi = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A} dx = \frac{q}{\hbar} \Phi \quad (4.37)$$

波動関数の一価性より  $\phi$  は  $2\pi$  の整数倍  $n$  でなければならない。

$$\frac{q}{\hbar} \Phi = 2\pi n \longrightarrow \Phi = \frac{h}{q} n \quad (4.38)$$

こうして、アハラノフ-ボーム効果の基本周期  $h/q$  から、系を構成する最小電荷  $q$  を知ることができる。 $q$  は普通の金属では素電荷  $e$ 、超伝導体では  $2e$  であることがわかる。後者は、超伝導体中で電子 2 個がクーパー対と呼ばれる基本単位を構成していることを示している\*1。

## 4.4 超選択則

異なった電荷をもった状態の重ね合わせの状態を作ることはいできない。もし、電荷  $q_1$  の状態  $\Psi_1$  と電荷  $q_2$  の状態  $\Psi_2$  の重ね合わせの状態  $\Psi = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$  が実現可能であると仮定すると、この状態は (4.27) のゲージ変換によって次のように変換される。

$$\Psi = \alpha e^{iq_1\chi} \Psi_1 + \beta e^{iq_2\chi} \Psi_2 = e^{iq_1\chi} (\alpha\Psi_1 + \beta e^{i(q_2-q_1)\chi} \Psi_2) \quad (4.39)$$

\*1 Yang が指摘したように (C. N. Yang, Phys. Rev. **D1**, 2360 (1970))、異なった素粒子の電荷  $q$  が互いに有理比でないとする、アハラノフ-ボーム効果は周期的でなくなり、ゲージ群はコンパクトではなくなる。ゲージ群がコンパクトであるためには電荷が量子化されている必要がある。

これから粒子密度の分布  $|\Psi|^2$  を計算するとそれがゲージ変換の関数  $\chi$  に依存することがわかる。これは物理量がゲージ変換によって不変であるというゲージ理論の基本原理に矛盾する。従って、電荷の異なった状態を重ね合わせた状態は物理的には存在しない。これを電荷の超選択則 (superselection rule) という。

## 4.5 自由場の正準形式

自由場とは電荷が存在しない電磁場をいう。クーロンゲージでは、このとき  $\phi = 0$  であり、電流の縦成分  $\mathbf{j}_L$  も 0 となる。このとき (4.19) 式より  $\mathbf{A}$  は方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4.40)$$

を満たす。これは、光子の質量がゼロであることを表している。実際、質量が  $m$  の粒子のエネルギー  $E$  と運動量  $p$  の関係は

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

で与えられるので、これに量子化の手続き ( $p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ) を施すと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_\mu = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A_\mu \quad (4.41)$$

が得られ、これを (4.40) 式と比較すると  $m = 0$  であることがわかる。このように、ゲージ不変な場に対応する量子 (今の場合は光子) の質量はゼロとなる。クーロンゲージでは  $\text{div} \mathbf{A} = 0$  なので、電磁場の自由度は横波の 2 成分のみとなる。物理的にはこれらの自由度は、偏光の自由度が 2 個あることに対応している。

(4.40) の解は次式で与えられる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[ \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right], \quad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|, \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* = \mathbf{A}_{-\mathbf{k}} \quad (4.42)$$

これから、電場と磁場は次のように求められる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} i\omega_{\mathbf{k}} \left[ \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right] \quad (4.43)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot} \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \times \left[ \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right] \quad (4.44)$$

電磁場の全エネルギー  $E$  は

$$E = \frac{1}{2} \int \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) d\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{k}} 2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \quad (4.45)$$

と計算される。ここで  $V$  は電磁場が存在する領域の体積である。複素量  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$  の実部と虚部をそれぞれ一般化された位置  $Q_{\mathbf{k}\lambda}$  と運動量  $P_{\mathbf{k}\lambda}$  とみなそう。

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}^2}} \sum_{\lambda=1,2} (\omega_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}\lambda} + iP_{\mathbf{k}\lambda}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (4.46)$$



ここで、 $\lambda = 1, 2$  は光子の偏光を指定する量子数である。また、偏光ベクトル  $\varepsilon_{\mathbf{k}\lambda}$  は波数ベクトルが  $\mathbf{k}$ 、偏光が  $\lambda$  の電磁場成分の偏光方向を表す単位ベクトルであり、 $\lambda$  の値が異なる偏光ベクトルは直交する。(4.46) を (4.45) に代入すると、電磁場のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} (P_{\mathbf{k}\lambda}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}\lambda}^2) \quad (4.47)$$

となり、調和振動子の集合体と数学的に同等であることがわかる。

## 4.6 電荷と磁束の不確定性関係

電磁場は、試験電荷と呼ばれる電荷をもった粒子に作用する力を通じて測定できる。ハイゼンベルグは、試験電荷の位置と運動量の間の不確定性関係が成立するために、これによって測定される電場と磁場の間にも同様な不確定性関係が成立しなければならないことを指摘した。このことを次の例で示そう。

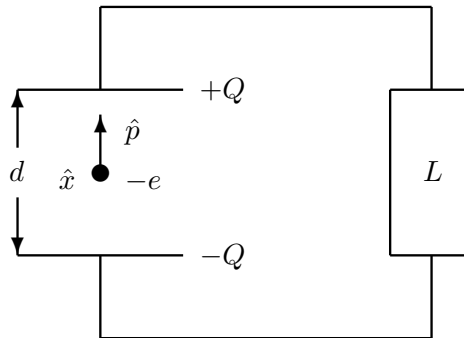


図 3.2 LC 回路とキャパシタンスの二つの電極間を運動する電子

インダクタンスが  $L$  のコイルとキャパシタンスが  $C$  の平行金属板からなる LC 回路を考える (図 3.2 参照)。図 3.2 のように電子が 2 つの金属板に垂直に運動している状況を考え、運動方向の電子の位置と運動量をそれぞれ  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  とする。また、キャパシタンスに蓄えられた電荷を  $Q$ 、コイルを貫く磁束を  $\Phi$  とする。電子は金属板間の電場  $E = V/d$  ( $d$  は 2 つの金属板の距離) によって加速されるので方程式

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = e \frac{V}{d} = -\frac{e}{d} \frac{d\Phi}{dt}$$

が成立する。ここで、2 番目の等式を導く際にファラデーの電磁誘導の法則  $V = -d\Phi/dt$  を使った。これを積分すると

$$\Phi = -\frac{d}{e} \hat{p} + \text{定数} \quad (4.48)$$

が得られる。他方、電子が  $dx$  だけ移動すると金属板には  $-\frac{e}{d}dx$  なる鏡像電荷が誘起されるので関係式

$$dQ = -\frac{e}{d} d\hat{x}$$

が成立し、これを積分することにより

$$Q = -\frac{e}{d}\hat{x} + \text{定数} \quad (4.49)$$

が得られる。(4.48) 式と (4.49) 式から、位置と運動量が演算子としての性質を持つとそれらと結合する電荷と磁束もまた演算子として振舞うことがわかる。そこで、これらを  $\hat{Q}$ 、 $\hat{\Phi}$  と書くと

$$[\hat{Q}, \hat{\Phi}] = [\hat{x}, \hat{p}] \quad (4.50)$$

が成立することがわかる。これに電子の位置と運動量の交換関係  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  を代入すれば、 $\hat{Q}$  と  $\hat{\Phi}$  の間の交換関係

$$[\hat{Q}, \hat{\Phi}] = i\hbar \quad (4.51)$$

が得られる。

LC 回路のハミルトニアン  $\hat{H}$  は、コイルに蓄えられた磁場のエネルギー  $\hat{\Phi}^2/2L$  とキャパシタンスの静電エネルギー  $\hat{Q}^2/2C$  の和で与えられる。

$$\hat{H} = \frac{\hat{\Phi}^2}{2L} + \frac{\hat{Q}^2}{2C} \quad (4.52)$$

これは調和振動子のハミルトニアンと同じなので、交換関係 (4.51) を課することによって LC 回路は量子化され、固有エネルギーは

$$E_n = \hbar\omega_{\text{LC}}(n + 1/2), \quad \omega_{\text{LC}} = (LC)^{-1/2} \quad (4.53)$$

で与えられる。4.5 節で示されたように、電荷が存在しない自由な電磁場は調和振動子の集合体とみなすことができ、同様な手続きにより量子化される。

交換関係 (4.51) は、磁束と電荷の値は同時に確定することができず、不確定性関係

$$\Delta\Phi\Delta Q \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.54)$$

を満足することを意味している。

LC 回路のコンデンサーに蓄えられた電荷  $Q$  が量子力学的にどれくらい揺らぐかを評価してみよう。量子化されたエネルギーの最小値は零点エネルギー  $\frac{1}{2}\hbar\omega_{\text{LC}}$  である。基底状態においては電荷のエネルギーと磁場のエネルギーの期待値は等しいので

$$\left\langle \frac{\hat{Q}^2}{2C} \right\rangle = \frac{\hbar\omega_{\text{LC}}}{4} \quad (4.55)$$

電荷の期待値をゼロとするとこれから電荷の揺らぎとして次の結果が得られる。

$$\Delta Q \equiv \sqrt{\langle \hat{Q}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\text{LC}}C}{2}} = \frac{e}{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\text{LC}}}{e^2/2C}} \quad (4.56)$$

このように、量子化エネルギー  $\hbar\omega_{\text{LC}}$  と電子 1 個の静電エネルギー  $e^2/2C$  の比が電荷の量子揺らぎの大きさを決める。

不確定性関係 (4.54) および電荷の揺らぎ (4.56) は、メゾスコピック領域において実際に観測することができ、極微小なデバイスの動作性能に原理的な限界を与える要因となっている\*2。また、超伝導を用いた量子コンピュータデバイスにおいてもこのような電気回路の量子力学は重要な役割を果たす\*3。

## 4.7 第二量子化

古典電磁場は波動方程式に従うので、数学的には（波動方程式である）シュレーディンガー方程式と同じレベルにあるとみなすこともできる。このことから、電磁場を量子化することは第二量子化と呼ばれる。電磁場の第二量子化は電磁場のエネルギーの表式 (4.47) に現れる一般化された位置と運動量が調和振動子と同じ交換関係を満足することを要請することでなされる。

$$\left[ \hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{P}_{\mathbf{k}'\lambda'} \right] = i\hbar\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}, \quad \left[ \hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{Q}_{\mathbf{k}'\lambda'} \right] = 0, \quad \left[ \hat{P}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{P}_{\mathbf{k}'\lambda'} \right] = 0. \quad (4.57)$$

ここで、 $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$  は  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  のとき 1、 $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$  のとき 0 をとるクロネッカーのデルタ記号である ( $\delta_{\lambda,\lambda'}$  も同様)。このとき、電磁場のエネルギーの表式 (4.47) は量子力学的ハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} (\hat{P}_{\mathbf{k}\lambda}^2 + \omega_{\mathbf{k}\lambda}^2 \hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda}^2) \quad (4.58)$$

となる。

交換関係 (4.57) とハミルトニアン (4.58) で記述される量子化された電磁場の性質を理解するために、次のような演算子を導入しよう。

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}}\hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda} - i\hat{P}_{\mathbf{k}\lambda}), \quad \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}}\hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda} + i\hat{P}_{\mathbf{k}\lambda}) \quad (4.59)$$

ここで、 $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$  と  $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$  はそれぞれ生成演算子と消滅演算子と呼ばれ、次の交換関係を満足する。

$$\left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger \right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}, \quad \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'} \right] = 0, \quad \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger \right] = 0 \quad (4.60)$$

\*2 単一電子デバイスの物理と動作限界については、例えば、上田正仁：応用物理 **62-9**, pp. 889-897 (1993); 日本物理学会誌 **49**, pp. 751-757 (1994)。

\*3 電気回路の量子力学的性質に着目した研究領域を回路量子電気力学 (circuit quantum electrodynamics) と呼ばれる。最近のレビュー記事としては、A. Blais, A. Grimso, S. M. Girvin, and A. Wallraff, Rev. Mod. Phys. **93**, 025005 (2021) を参照

最初の交換関係は次のようにして示すことができる。

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] &= \frac{1}{2\hbar\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[ \omega_{\mathbf{k}}\hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda} + i\hat{P}_{\mathbf{k}\lambda}, \omega_{\mathbf{k}'}\hat{Q}_{\mathbf{k}'\lambda'} - i\hat{P}_{\mathbf{k}'\lambda'} \right] \\ &= \frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \times \hbar\omega_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'} \times 2 = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'} \end{aligned}$$

他の交換関係も同様に示すことができる。(4.59)を $\hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda}$ ,  $\hat{P}_{\mathbf{k}\lambda}$ について解くと、

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger), \quad \hat{P}_{\mathbf{k}\lambda} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) \quad (4.61)$$

これらを(4.58)に代入すると、

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.62)$$

が得られる。このように、量子化された自由電磁場は、互いに独立な量子化された調和振動子の集合と等価であることがわかる。

電磁場を生成消滅演算子を使って表す操作は場の量子化の例となっている。(4.46)式の $\hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda}$ ,  $\hat{P}_{\mathbf{k}\lambda}$ に(4.61)式を代入したものを $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^{(+)}$ と書くと、

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}^2V}} (\omega_{\mathbf{k}}\hat{Q}_{\mathbf{k}\lambda} + i\hat{P}_{\mathbf{k}\lambda})\epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(4.61)}{=} \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}^2V}} \left[ \omega_{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) + i(-i)\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) \right] \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \end{aligned} \quad (4.64)$$

右辺の消滅演算子 $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ の時間依存性はハイゼンベルグ表示では $e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$ で与えられる。これを正の振動数成分とよび、左辺のようにプラス記号(+)をつけて表す。同様にして負の振動数成分は

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* \rightarrow \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^{(-)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \quad (4.65)$$

と量子化される。ここで $\epsilon_{\mathbf{k}\lambda}$ は波数 $\mathbf{k}$ をもったフーリエ成分の偏光ベクトルであり、 $\mathbf{k}$ に垂直な二つの単位ベクトルまたはそれらの線形結合で表される。これらの置き換えを(4.42)-(4.44)式に代入すると次の結果が得られる。

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \quad (4.66)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \quad (4.67)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}V}} \mathbf{k} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \quad (4.68)$$

右辺で  $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ ,  $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$  は電磁場の振幅が量子化されたもので光の粒子性を表している。これは、 $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{n}_{\mathbf{k}\lambda}$  の固有値が離散的な値  $(0, 1, 2, \dots)$  しかとらないからである。他方、 $e^{\pm i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)}$  は波動性を表している。このように第二量子化すると粒子性と波動性が同じ表式の中にあらわな形で表現されるというメリットがある。

(4.68) 式で  $\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}}$  は 1 光子当たりの電場の大きさを、 $\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}V}}k = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}}$  は磁場の強さを表している。このように、1 光子あたりの電場や磁場の強さは、電磁場を微小な体積  $V$  に閉じ込めることにより大きくすることができる。そのような微小共振器中 (microcavity) では光子 1 個といえども原子と強く相互作用をする。



## 第5章

# 量子光学の典型的な量子状態

量子光学で現れる典型的な量子状態は光子数状態、コヒーレント状態、熱的状态、スクイズド状態の4つである。本章ではこれら典型的な量子状態を導入し、古典的な振動電流からコヒーレント光が生じることを示すグラウバーの定理について述べる。更に、量子光学においてしばしば議論されるエルミートな位相演算子が存在するかどうかについて議論する。

### 5.1 光子数状態

光子の量子状態は波数  $\mathbf{k}$  と偏光方向  $\lambda$  で特徴づけられる。対応する生成、消滅演算子をそれぞれ  $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ 、 $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$  と書こう。この時、光子数に対応する数演算子 (number operator)  $\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda}$  は  $\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$  で与えられる。数演算子の固有状態は一般にフォック状態 (Fock state) と呼ばれるが、光子に対しては**光子数状態** (photon number state) とも呼ばれる。電磁場のハミルトニアンは、(4.62) から

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.1)$$

で与えられる。電磁場の状態は、波数  $\mathbf{k}$  と偏光方向  $\lambda$  で指定される各モードに存在する光子数  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  を与えることで指定できる。そのような状態を  $|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle$  と書くことにする。この状態はハミルトニアン (5.1) の固有状態になっていることがわかる。

$$\hat{H}|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) |\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle \quad (5.2)$$

このように、フォック状態はエネルギーが量子化されていることを直接的に表現しているが、我々が電場や磁場に対して持っている波としての古典的描像を表現することには適していない。実際、フォック状態  $|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle$  に対しては電場演算子 (4.67) や磁場演算子 (4.68) の期待値はゼロとなる。

$$\langle \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} | \hat{\mathbf{E}} | \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = 0 \quad (5.3)$$

$$\langle \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} | \hat{\mathbf{B}} | \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = 0 \quad (5.4)$$

しかし、これらは電場や磁場が存在しないことを意味するのではなく、期待値がゼロの周りに揺らいでいる。実際、電場演算子と磁場演算子の2乗の期待値を計算すると

$$\langle \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} | \hat{\mathbf{E}}^2 | \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{\epsilon_0 V} \left( n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.5)$$

$$\langle \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} | \hat{\mathbf{B}}^2 | \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}\mu_0}{V} \left( n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.6)$$

が得られる。特に、光子がまったく存在しない ( $n_{\mathbf{k}\lambda} = 0$ ) 真空状態でも電場や磁場が揺らいでいることがわかる。これを、電磁場の**零点揺らぎ** (zero-point fluctuations) という。真空揺らぎは、原子の自然放出を誘起するなど現実に観測される効果をもたらす。

## 5.2 コヒーレント状態

日常的になじみの深い電場や磁場は波として振舞うことを我々は知っている。**コヒーレント状態** (coherent state) はこのような古典的な波—電磁波—に最も近い量子状態である。記述を簡単にするために、決まった波数  $\mathbf{k}$  と偏光  $\lambda$  を持った電磁場モードを考え、その生成消滅演算子を添え字  $\mathbf{k}$ ,  $\lambda$  を省略して  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  と書こう。光のコヒーレント状態を定義するために次のような**変位演算子** (displacement operator) を導入する。

$$\hat{D}(\alpha) \equiv e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} \quad (5.7)$$

変位演算子は消滅演算子 (生成演算子) を  $\alpha$  ( $\alpha^*$ ) だけ平行移動する役割を果たしている。

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad (5.8)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^* \quad (5.9)$$

証明は次の通りである。下記のベーカー・キャンベル・ハウズドルフの公式 (5.12) を用いると  $\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}$  および  $\hat{D}^\dagger(\alpha) = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha^*\hat{a}} e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}$  なのでこれを (5.8) に代入して  $e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = \hat{a} + \alpha$  であることに注意すると (5.8) が得られる。(5.9) も同様に証明できる。

コヒーレント状態  $|\alpha\rangle$  は変位演算子を用いて

$$|\alpha\rangle \equiv \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (5.10)$$

と定義できる。コヒーレント状態に消滅演算子を作用させると

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \hat{D}(\alpha)(\hat{a} + \alpha)|0\rangle = \alpha\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

すなわち

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (5.11)$$

が得られる。ここで、 $\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = 1$  および  $\hat{a}|0\rangle = 0$  を使った。このように、コヒーレント状態は消滅演算子の固有状態になっている。



2つの演算子  $\hat{A}, \hat{B}$  が交換関係  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$  を満足する場合に成立するベーカー・キャンベル・ハウズドルフの公式 (Baker-Campbell-Hausdorff formula)

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \quad (5.12)$$

を用いると、 $\hat{D}(\alpha)$  は

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \quad (5.13)$$

と書けるので  $e^{-\alpha^* \hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$  に注意すると  $|\alpha\rangle$  は光子数状態を用いて次のように展開できる。

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (5.14)$$

従って、コヒーレント状態の光子数を測定して  $n$  個の光子が観測される確率  $P(n)$  は

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \quad (5.15)$$

のようにポアソン分布で与えられる。ここで、 $\bar{n} \equiv |\alpha|^2$  は測定される光子数の期待値である。ポアソン分布は個々の事象が互いに独立に起こるときに現れる分布であり、コヒーレント状態の光子数分布はランダムであることがわかる。コヒーレント状態の光子数揺らぎの分散は

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle \equiv \bar{n}^2 - \bar{n} = \bar{n} \quad (5.16)$$

で与えられる。このように、コヒーレント状態では光子数の期待値と分散は等しい。これはコヒーレント状態における光子数分布がポアソン分布であることの帰結である。

対比として、電磁場を連続変数とみなせる古典的な電磁場を考える。電場  $\mathbf{E}$  が期待値がゼロの周りのガウス分布であると仮定すると、光の強度  $I = |\mathbf{E}|^2$  の確率分布  $P(I)$  は平均強度を  $\bar{I}$  とすると

$$P(I) = \frac{1}{\bar{I}} e^{-I/\bar{I}} \quad (5.17)$$

で与えられることがわかる。これから光強度の分散は

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle := \bar{I}^2 - \bar{I}^2 = \bar{I}^2 \quad (5.18)$$

となり、平均強度の2乗に等しくなる。

さて、コヒーレント状態の振幅を  $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$  のように振幅と位相に分けて書くと、(5.14) は

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{P(n)} (e^{i\phi})^n |n\rangle \quad (5.19)$$

と書ける。右辺は、コヒーレント状態が、各々の光子数状態  $|n\rangle$  にポアソン分布に対応する振幅  $\sqrt{P(n)}$  と光子 1 個あたり  $e^{i\phi}$  という同じ位相因子をつけて重ね合わせた状態であると解釈される。この状態に対して、波数が  $\mathbf{k}$  で偏光が  $\lambda$  の電場演算子と磁場演算子

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \quad (5.20)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right] \quad (5.21)$$

の期待値をとると

$$\langle \alpha | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = -\sqrt{\frac{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{\epsilon_0 V}} |\alpha| \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t + \phi) \quad (5.22)$$

$$\langle \alpha | \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = -\sqrt{\frac{2\hbar}{\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}}} |\alpha| \mathbf{k} \times \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t + \phi) \quad (5.23)$$

これらはまさに正弦的に振動する古典的電場と磁場を表しており、 $\phi$  はその位相因子となっている。

### 5.3 グラウバーの定理

コヒーレント状態がエルミートでない消滅演算子の固有状態である (5.11) ことからわかるように、コヒーレント状態は厳密に言うと量子力学のオブザーバブルに対応する固有状態とはいえない。しかし、(5.22) や (5.23) のように規則正しく振動する古典電磁場はコヒーレント状態に対する量子力学的期待値を与える。

グラウバーは古典的な振動電流から発生する電磁波がコヒーレント状態であることを指摘した\*1。電荷と電磁場との相互作用はハミルトニアン

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = - \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (5.24)$$

で表される。ここで、ベクトルポテンシャル  $\hat{\mathbf{A}}$  は演算子であるが、電流密度  $\mathbf{j}$  は c-数である。状態ベクトルは

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}_{\text{int}} |\Psi(t)\rangle \quad (5.25)$$

に従って時間発展する。時刻  $t = 0$  で電磁場が真空状態であるとする、時刻  $t$  における電磁場の状態は、

$$|\Psi(t)\rangle = \mathcal{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_{\text{int}}(t') dt'\right) |0\rangle \quad (5.26)$$

で与えられる。ここで  $\mathcal{T}$  は時間順序演算子である。時間順序演算子は異なった時刻の相互作用ハミルトニアンが一般には交換しない場合に重要になるが、ここでは電流が古典的

\*1 R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963)。グラウバーはこの論文の仕事でノーベル物理学賞を受賞した。

な量であると仮定しているなのでその効果は無視できる。(5.26) に (4.66) を代入して

$$\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) \equiv \frac{i}{\sqrt{2\epsilon_0 V \hbar \omega_{\mathbf{k}}}} \int_0^t dt' \int d\mathbf{r} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t')} \quad (5.27)$$

とおくと、(5.26) は

$$|\Psi(t)\rangle = \prod_{\mathbf{k}\lambda} \exp\left(\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}\right) |0\rangle = \prod_{\mathbf{k}\lambda} |\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)\rangle \quad (5.28)$$

となりコヒーレント状態の直積状態と与えられる。

この定理から、アンテナの電荷分布を振動させるとそこから発生する電磁波はコヒーレント状態であることがわかる。発振しきい値よりも十分高いポンプレベルで動作するレーザー光もコヒーレント状態である。この場合、レーザー媒質中に形成される分極がアンテナの役割を果たしているとみなすことができる。

コヒーレント状態は、(5.11) のように消滅演算子の固有状態になっている。これは、光子を1個消滅させても状態が変化しないことを意味しているが、振幅が大きい古典的な電磁場はそのような状態に対応している。

## 5.4 熱的狀態

波数と偏光方向が決まったシングルモードの電磁場が温度  $T$  の熱浴と熱平衡状態にあるとしよう。この系のハミルトニアンは  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$  であり、密度演算子は逆温度  $\beta = (k_{\text{B}}T)^{-1}$  を定義すると

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}} = \frac{e^{-\gamma \hat{a}^\dagger \hat{a}}}{\text{Tr} e^{-\gamma \hat{a}^\dagger \hat{a}}} = (1 - e^{-\gamma}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma n} |n\rangle \langle n| \quad (5.29)$$

で与えられる。ここで  $\gamma := \beta \hbar \omega$  である。これから熱的狀態の光子数の期待値と分散を計算すると

$$\bar{n} = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{n}) = \frac{1}{e^\gamma - 1} \quad (5.30)$$

$$\bar{n}^2 = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{n}^2) = \frac{1}{e^\gamma - 1} + 2 \left( \frac{1}{e^\gamma - 1} \right)^2 = \bar{n} + 2\bar{n}^2 \quad (5.31)$$

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \bar{n} + \bar{n}^2 \quad (5.32)$$

(5.30) から熱的狀態は黒体輻射に他ならないことがわかる。(5.32) を (5.16) と (5.18) と比較すると、黒体輻射の光子数の揺らぎはポアソンの揺らぎ（粒子性）に対応する項  $\bar{n}$  と古典的な波の揺らぎに対応する項  $\bar{n}^2$  の和になっていることがわかる。アインシュタインはこのことから光が粒子性と波動性の2重性を持っていることを洞察した。

## 5.5 スクイズド状態

生成消滅演算子の代わりにそれらの線形結合で定義されるエルミート演算子

$$\hat{a}_1 \equiv \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{a}_2 \equiv \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (5.33)$$

を考える。電場演算子 (5.20) を  $\hat{a}_1$ 、 $\hat{a}_2$  を用いて表すと

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -2\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}}\epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \left[ \hat{a}_1 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t) + \hat{a}_2^\dagger \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t) \right] \quad (5.34)$$

となり、 $\hat{a}_1$ 、 $\hat{a}_2$  がそれぞれ電場の正弦成分と余弦成分の振幅に対応する演算子であることがわかる。これらは正弦波と余弦波が直交することから**直交位相振幅** (quadrature-phase amplitudes) と呼ばれ、ホモダイン検波 (homodyne detection) で測定することができる。

古典電磁場では  $\hat{a}_1$  と  $\hat{a}_2$  は独立に変化することができるが、量子論では  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  から交換関係

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = \frac{i}{2} \quad (5.35)$$

が成立し、(2.31) より不確定性関係

$$\Delta a_1 \Delta a_2 \geq \frac{1}{4} \quad (5.36)$$

を満足しなければならない。従って、一方の精度を良くすると他方のそれは悪くなる。

コヒーレント状態に対しては

$$\langle \alpha | \hat{a}_1 | \alpha \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*), \quad \langle \alpha | \hat{a}_1^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{4} [(\alpha + \alpha^*)^2 + 1], \quad (5.37)$$

$$\langle \alpha | \hat{a}_2 | \alpha \rangle = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^*), \quad \langle \alpha | \hat{a}_2^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{4} [-(\alpha - \alpha^*)^2 + 1] \quad (5.38)$$

となるので

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \frac{1}{2} \quad (5.39)$$

となり二つの直交位相振幅は同じ大きさの量子揺らぎを持っている。これはコヒーレント状態の直交位相振幅に情報をエンコードする上での原理的な限界を与えており、**標準量子限界** (standard quantum limit (SQL)) と呼ばれている。

他方、不確定性関係を満足しつつ  $\hat{a}_1$  と  $\hat{a}_2$  の一方の揺らぎを SQL よりも小さくすることは可能である。そのような状態は**直交位相振幅スクイズド状態** (quadrature-phase amplitude squeezed state) と呼ばれる。(2.32) によれば、そのような状態  $|S\rangle$  は演算子

$$\hat{b} = e^r \hat{a}_1 + ie^{-r} \hat{a}_2 = \hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger \sinh r \quad (5.40)$$

( $r$  は実数) の固有状態

$$\hat{b}|S\rangle = \beta|S\rangle, \quad \beta = \langle S | \hat{b} | S \rangle = \langle \hat{a} \rangle \cosh r + \langle \hat{a}^\dagger \rangle \sinh r \quad (5.41)$$

として与えられ、この状態に対する  $\hat{a}_1$  と  $\hat{a}_2$  の分散は

$$\Delta a_1 \equiv \sqrt{\langle (\Delta \hat{a}_1)^2 \rangle} = \frac{1}{2}e^{-r}, \quad \Delta a_2 \equiv \sqrt{\langle (\Delta \hat{a}_2)^2 \rangle} = \frac{1}{2}e^r \quad (5.42)$$

となる。従って  $r > 0$  ( $r < 0$ ) のときは、 $\hat{a}_1$  ( $\hat{a}_2$ ) の揺らぎは標準量子限界よりも小さくなることがわかる。また、(5.42) は  $\Delta a_1 \Delta a_2 = 1/4$  を満足するので状態  $|S\rangle$  は最小不確定状態であることがわかる。

固有値方程式 (5.41) を満足する状態  $|S\rangle$  を実際に求めよう。そのためにまず、固有値方程式に現れる演算子  $\hat{b}$  はボソンの交換関係を満足することに着目する。実際、 $\cosh r = \mu$ 、 $\sinh r = \nu$  とおくと\*2

$$\hat{b} = \mu \hat{a} + \nu \hat{a}^\dagger \quad (5.43)$$

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \mu^2 - \nu^2 = 1 \quad (5.44)$$

となる。この時、(5.41) 式は (5.11) と形式的に全く同じ関係式となるので、 $|S\rangle$  は (5.10) と同様に演算子  $\hat{b}$  に対する変位演算子を用いて

$$|S\rangle = e^{\beta \hat{b}^\dagger - \beta^* \hat{b}} |0\rangle_b \quad (5.45)$$

と書けることがわかる。ここで、 $|0\rangle_b$  は生成消滅演算子がそれぞれ  $\hat{b}^\dagger$  と  $\hat{b}$  で与えられるボソンの真空を表しており、条件

$$\hat{b}|0\rangle_b = (\mu \hat{a} + \nu \hat{a}^\dagger)|0\rangle_b = 0 \quad (5.46)$$

を満足する。(5.45) の右辺の指数は (5.43) および (5.41) を代入すると

$$\beta \hat{b}^\dagger - \beta^* \hat{b} = \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \quad \alpha \equiv \langle \hat{a} \rangle \quad (5.47)$$

となるので (5.45) は (5.7) で定義される変位演算子  $\hat{D}(\alpha)$  を用いて次のように書ける。

$$|S\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle_b \quad (5.48)$$

交換関係  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  より  $\hat{a} = d/d\hat{a}^\dagger$  と形式的にかけることに着目すると (5.46) から

$$\left( \mu \frac{d}{d\hat{a}^\dagger} + \nu \hat{a}^\dagger \right) |0\rangle_b = 0 \quad (5.49)$$

が成立する。視察により、(5.49) の解は

$$|0\rangle_b = N e^{-\gamma \hat{a}^\dagger^2} |0\rangle, \quad \gamma \equiv \frac{\nu}{2\mu} = \frac{1}{2} \tanh r \quad (5.50)$$

で与えられることがわかる。ここで、 $N$  は状態  $|0\rangle_b$  が 1 に規格化されているという条件から決められる。右辺の指数を展開すると

$$|0\rangle_b = N \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} |2n\rangle \quad (5.51)$$

\*2 (5.43) はボゴリウボフ変換と呼ばれる。

これから

$${}_b\langle 0|0\rangle_b = N^2 \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{N^2}{\sqrt{1-4\gamma^2}} = N^2 \cosh r = 1 \rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \quad (5.52)$$

こうして、求めたいスクイズド状態は次のように与えられることがわかる。

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \hat{D}(\alpha) e^{-\gamma \hat{a}^{\dagger 2}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} e^{\alpha \hat{a}^{\dagger} - \alpha^* \hat{a}} e^{-\gamma \hat{a}^{\dagger 2}} |0\rangle \quad (5.53)$$

$$\alpha = \langle S|\hat{a}|S\rangle, \gamma = \frac{1}{2} \tanh r \quad (5.54)$$

右辺の指数部分に  $\hat{a}^{\dagger 2}$  という項が現れるが、これは直交位相振幅スクイズド状態が2光子を同時に放出したり吸収したりする非線型光学過程によって生成されることを示している。

スクイズド状態 (5.53) に対する光子数の期待値

$$\langle S|\hat{n}|S\rangle = {}_b\langle 0|\hat{D}^{\dagger}(\alpha) \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \hat{D}(\alpha)|0\rangle_b = {}_b\langle 0|(\hat{a}^{\dagger} + \alpha^*)(\hat{a} + \alpha)|0\rangle_b \quad (5.55)$$

を求めよう。(5.51) から  $|0\rangle_b$  が偶数個の光子しか含まないので、右辺の  $\alpha \hat{a}^{\dagger}$  と  $\alpha^* \hat{a}$  の期待値は消える。よって、

$$\begin{aligned} \langle S|\hat{n}|S\rangle &= |\alpha|^2 + N^2 \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2n = |\alpha|^2 + N^2 \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} N^{-2} \\ &= |\alpha|^2 + \sinh^2 r \end{aligned} \quad (5.56)$$

この結果から、直交位相振幅の一方の揺らぎを小さくするために  $|r|$  を大きくすると、平均光子数が増加することがわかる。すなわち、大きなスクイズングを得るためには光を強くする必要がある。

## 5.6 位相演算子

簡単のために波数ベクトル、周波数、および偏光方向が決まった単一モードの電磁場を考えよう。量子化された電場は、(4.66) より

$$\hat{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}} \left[ \hat{a} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{a}^{\dagger} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right] \quad (5.57)$$

で与えられる。対応する古典的な表式は (4.42) より

$$A(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + A^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (5.58)$$

で与えられる。両者を比較すると次の対応関係が成立することが期待できる。

$$\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}} \hat{a} \rightarrow A \equiv |A| e^{i\phi} \quad (5.59)$$

この対応から、古典的な位相  $\phi$  に対応する量子力学的な位相演算子が導入できないだろうかという疑問がわく。実は、以下に述べるようにその方法は一意的ではなく、また、原理的な問題も存在する。

古典電磁場は (5.22)、(5.23) のように位相  $\phi$  を持っている。ディラックは古典的な位相に対応する位相演算子 (phase operator) を消滅演算子を形式的に振幅演算子と位相演算子に分けることにより次のように定義した\*3。

$$\hat{a} = e^{i\hat{\phi}} \sqrt{\hat{n}} \quad (5.60)$$

この定義は古典電磁場とはよく対応している。実際、古典電磁場に最も近い量子状態であるコヒーレント状態  $|\alpha\rangle$  に対する期待値をとると、 $\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha = e^{i\phi} |\alpha| = e^{i\phi} \sqrt{\langle \hat{n} \rangle}$  であり、(5.60) と形式的に同じ形に書ける。(5.60) のエルミート共役をとると

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{n}} (e^{i\hat{\phi}})^\dagger \quad (5.61)$$

となる。もし、エルミートな位相演算子  $\hat{\phi}$  が存在するならば、 $(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = e^{-i\hat{\phi}}$  と書ける。さらに、位相演算子と数演算子  $\hat{n}$  の間に交換関係

$$[\hat{n}, \hat{\phi}] = i \quad (5.62)$$

を仮定すると

$$\hat{a} \hat{a}^\dagger = e^{i\hat{\phi}} \hat{n} e^{-i\hat{\phi}} = \hat{n} + 1 \quad (5.63)$$

となる\*4 ので正準交換関係  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  が得られる。また、(5.62) に (2.30)、(2.31) を当てはめると、光子数と位相の間の不確定性関係

$$\Delta n \Delta \phi \geq 1/2 \quad (5.64)$$

が導かれる。

以上の議論は、エルミートな位相演算子が存在することが前提とされているが、実は、エルミートな位相演算子という概念には次のような原理的な問題が存在する。(5.60) から  $e^{i\hat{\phi}} = \hat{a}(\hat{n})^{-\frac{1}{2}}$  と書けるが、この右辺の左側から完全系  $\hat{I} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$  を作用させて  $\langle n | \hat{a} = \sqrt{n+1} \langle n+1|$  と  $\langle n+1 | (\hat{n})^{-\frac{1}{2}} = (n+1)^{-1/2} \langle n+1|$  を使うと

$$e^{i\hat{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \hat{a} (\hat{n})^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n\rangle\langle n+1| (\hat{n})^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1| \quad (5.65)$$

が得られる。他方、(5.61) より得られる  $(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = (\hat{n})^{-\frac{1}{2}} \hat{a}^\dagger$  の右辺の右側から完全系  $\hat{I} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$  を作用させると

$$(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = (\hat{n})^{-\frac{1}{2}} \hat{a}^\dagger \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = (\hat{n})^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| \quad (5.66)$$

\*3 P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A114**, 243 (1927)

\*4 (5.63) 式の二番目の等式は、次のようにして示すことができる。 $\hat{f}(\alpha) \equiv e^{i\alpha\hat{\phi}} \hat{n} e^{-i\alpha\hat{\phi}}$  とおけば、 $\hat{f}'(\alpha) = e^{i\alpha\hat{\phi}} i[\hat{\phi}, \hat{n}] e^{-i\alpha\hat{\phi}} = e^{i\alpha\hat{\phi}} e^{-i\alpha\hat{\phi}} = 1$  となるので、両辺を  $\alpha$  について積分すると  $\hat{f}(\alpha) = \hat{f}(0) + \alpha = \hat{n} + \alpha$ 。ここで、 $\alpha = 1$  とおけば求める関係式が得られる。

が得られる。(5.65)、(5.66) より

$$e^{i\hat{\phi}}(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle\langle m+1| \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I} \quad (5.67)$$

$$(e^{i\hat{\phi}})^\dagger e^{i\hat{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle\langle m+1| = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n+1| = \hat{I} - |0\rangle\langle 0| \quad (5.68)$$

$$[e^{i\hat{\phi}}, (e^{i\hat{\phi}})^\dagger] = |0\rangle\langle 0| \quad (5.69)$$

が得られる。 $\hat{\phi}$  がエルミート演算子であるためには、 $e^{i\hat{\phi}}(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = (e^{i\hat{\phi}})^\dagger e^{i\hat{\phi}} = \hat{I}$  が成立しなければならないが、(5.68) の右辺に項  $|0\rangle\langle 0|$  が存在するためにこれが成立しないことがわかる。しかしながら、(5.68) と単位演算子  $\hat{I}$  との差が真空成分  $|0\rangle\langle 0|$  だけであるので、真空との重なり積分がほとんどないくらい平均光子数が大きく、かつ、その標準偏差が平均値よりも十分に小さい状態（例えば、コヒーレント状態）に対しては、不確定性関係 (5.64) が成立するものと考えても実際上は差し支えない。

観測可能な物理量（オブザーバブル）に対応するエルミートな位相演算子が存在するかどうかという問題は、古典電磁気学では位相が自明な概念であるだけに多くの関心を集めてきた。サスキントとグロゴワーは位相演算子は上記のように存在しないが、サイン、コサインに対応するエルミートな演算子が次のように定義できることを指摘した\*5。

$$\hat{S} \equiv \frac{1}{2i} [e^{i\hat{\phi}} - (e^{i\hat{\phi}})^\dagger] = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n|) \quad (5.70)$$

$$\hat{C} \equiv \frac{1}{2} [e^{i\hat{\phi}} + (e^{i\hat{\phi}})^\dagger] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) \quad (5.71)$$

サイン演算子  $\hat{S}$ 、コサイン演算子  $\hat{C}$  はその定義式から明らかなようにエルミートであるが、簡単な計算から

$$\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = \hat{I} - \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| \quad (5.72)$$

となり、正弦関数、余弦関数から期待される関係式  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$  と比べて、やはり真空成分だけがずれている。他方、 $\hat{S}$ 、 $\hat{C}$ 、光子数演算子  $\hat{n}$  は交換関係

$$[\hat{n}, \hat{S}] = i\hat{C}, \quad [\hat{n}, \hat{C}] = -i\hat{S}, \quad [\hat{S}, \hat{C}] = \frac{1}{2i}|0\rangle\langle 0| \quad (5.73)$$

を満足するので次の不確定性関係が成立する。

$$\Delta n \Delta S \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle|, \quad \Delta n \Delta C \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{S} \rangle|, \quad \Delta S \Delta C \geq \frac{1}{4} |\langle |0\rangle\langle 0| \rangle| \quad (5.74)$$

ペグとバーネットは状態空間を光子数が有限のところまで切断して周期的境界条件を仮定すれば、エルミートな位相演算子が定義できることを指摘した\*6。いま、光子数が  $s+1$

\*5 L. Susskind and J. Glogower, *Physics* **1**, 49 (1964); P. Carruthers and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411 (1968)

\*6 D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys. Rev. A* **39**, 1665 (1989)



個以上存在することはないものと仮定し、状態  $|s+1\rangle$  は  $|0\rangle$  に等価であるという周期的境界条件を仮定しよう。このとき、完全性条件は

$$\sum_{n=0}^s |n\rangle\langle n| = \hat{I}, \quad |s+1\rangle = |0\rangle \quad (5.75)$$

と書ける。すると (5.60)、(5.61) は

$$e^{i\hat{\phi}} = \sum_{n=0}^s |n\rangle\langle n+1|, \quad (e^{i\hat{\phi}})^\dagger = \sum_{n=0}^s |n+1\rangle\langle n| \quad (5.76)$$

と書ける。これらが、 $\hat{\phi}$  がエルミートであるための条件  $e^{i\hat{\phi}}(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = (e^{i\hat{\phi}})^\dagger e^{i\hat{\phi}} = \hat{I}$  を満足することは容易に示せる。また、 $\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = \hat{I}$  を満足することもわかる。このように、ヒルベルト空間を有限の光子数で切断することにより、エルミートな位相演算子を定義することができる。また、カットオフ光子数  $s$  を十分に大きく取ればヒルベルト空間を有限の光子数で切断することは実際上問題がないように思われる。

しかし、このとき生成消滅演算子に対する正準交換関係が真空成分だけずれてしまう。実際、

$$\hat{a} = e^{i\hat{\phi}}\sqrt{\hat{n}} = \sum_{n=0}^s \sqrt{n+1}|n\rangle\langle n+1|, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{n}}(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = \sum_{n=0}^s \sqrt{n+1}|n+1\rangle\langle n| \quad (5.77)$$

から

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{a}^\dagger &= \sum_{n=0}^s (n+1)|n\rangle\langle n| \\ \hat{a}^\dagger\hat{a} &= \sum_{n=0}^s (n+1)|n+1\rangle\langle n+1| = \sum_{n=0}^s n|n\rangle\langle n| + (s+1)|0\rangle\langle 0| \end{aligned}$$

となり

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I} - (s+1)|0\rangle\langle 0|$$

が導かれる。右辺のずれは、カットオフ  $s$  を大きくとるほど深刻になる。実は、正準交換関係  $([\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I})$  が成立することを要求すると、エルミートな位相演算子が存在できないことが示される\*7。エルミートな位相が存在できないことは、量子力学において位相の絶対値というもの本来観測できないことと関連している。このように、位相という概念は (5.59) 式に対応関係からも推測できるように電磁場の振幅が大きい場合に近似的に成立する準古典的概念であり、真空との重なり積分が無視できるくらい光子数が多い状態に対してのみ適用できる。

\*7 K. Fujikawa, Phys. Rev. **A52**, 3299 (1995)

## 5.7 フォトンカウンティング理論

測定理論の例題として、共振器中に閉じ込められた光をフォトンカウンティングすることを考えよう。共振器の鏡から漏れてくる光をフォトンカウンターで検出する状況を考える\*8。光子を1個検出する測定演算子は(3.36)から  $\hat{A}_1 = \sqrt{\lambda dt} \hat{a}$  で与えられる。これから、時刻  $t$  に1光子が検出された直後の時刻  $t^+$  における密度演算子  $\hat{\rho}(t^+)$  は直前の密度演算子  $\hat{\rho}(t)$  を用いて次のように与えられる。

$$\hat{\rho}(t^+) = \frac{\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger}{\text{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}]} \quad (1 \text{ 光子検出過程}) \quad (5.78)$$

これから1光子検出直後に共振器内に残った光子数の平均値は

$$\langle n(t^+) \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}(t^+)\hat{n}] = \langle n(t) \rangle - 1 + \frac{\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle}{\langle n(t) \rangle} \quad (5.79)$$

で与えられることが分かる。ここで  $\langle n(t) \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{n}]$  及び  $\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{n}^2] - \{\text{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{n}]\}^2$  はそれぞれ一光子検出直前の光子数の平均値及び分散である。この結果は検出器が1光子を吸収する直前と直後の状態の平均光子数の差が1には等しくならず光子数分布の広がりを表す分散に依存することを示している。

唯一の例外は直前の状態が光子数確定状態の場合で、 $\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle = 0$  となるので、 $\langle n(t^+) \rangle$  と  $\langle n(t) \rangle$  の差はちょうど1に等しくなる。直前の状態がコヒーレント状態の場合は  $\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle = \langle n(t) \rangle$  となるので(5.79)式から  $\langle n(t^+) \rangle = \langle n(t) \rangle$  が得られる。つまり、検出器が1光子を吸収したにもかかわらず、共振器内の平均光子は吸収前と比べて変化しない。特に、直前の状態が熱分布(黒体輻射)している場合の分散は(5.32)より  $\langle [\Delta n(t)]^2 \rangle = \langle n(t) \rangle + \langle n(t) \rangle^2$  で与えられているから(5.79)式から  $\langle n(t^+) \rangle = 2\langle n(t) \rangle$ 、つまり、検出器が1光子を吸収することによって残りの平均光子数が直前の場合に比べて2倍に増える!

この事情は次のように理解することができる。1光子検出直前の状態が真空状態と光子数100の状態が等しい確率で存在する混合状態であるとすると密度演算子は

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |100\rangle\langle 100|)$$

で与えられる。従って、1光子検出直前の状態の平均光子数は50である。ところが真空状態では光子が検出される確率は0だから1光子が検出されたという情報からはじめの状態が光子数100の光子数状態であったと結論できる。従って、測定直後の状態はこれから1光子が吸収された光子数状態  $|99\rangle\langle 99|$  になり、平均光子数は50から99へほぼ倍増する。平均光子数が  $\langle n \rangle$  の熱平衡状態の密度演算子は

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n|$$

\*8 M. Ueda, N. Imoto, and T. Ogawa, Phys. Rev. A **41**, 3891 (1990)

で与えられ、真空状態  $|0\rangle\langle 0|$  が最大の確率をもっている。この状態に対して1光子が検出されると、測定直後の状態はこの最大の確率が (5.78) 式に従って他の光子数状態へ再分配され、その結果、残りの平均光子数が増える。他方、コヒーレント状態は消滅演算子の固有状態になっているために1光子検出過程の前後で状態は変化しない。故に、平均光子数も変化しない。



## 第 6 章

# 量子干渉効果

### 6.1 二重スリットの実験

Each photon goes partly into each of the two slits, and then interferes only with itself.

— P. A. M. Dirac

この有名なディラックの言葉は彼独特の印象的な表現ではあるが、光子という「実在」がスリットを通り抜けていると誤解してはならない。干渉するのは実在の波ではなく、系の情報を記述する確率振幅であると考えべきである。

粒子がスクリーン上のある点に至る経路が 2 通りある場合（例えば、二重スリットの実験）を考える。粒子がどちらの経路を通ったかを識別することが原理的に不可能な場合には、それぞれの経路を通る確率振幅は干渉する結果スクリーン上に干渉縞が現れる。実は、この識別不可能性という条件さえ満足されれば、粒子が同じ源から発せられる必要性すらないのである。それゆえに、6.4 節で議論されるように、独立な 2 つのレーザー光を重ね合わせると干渉縞が現れる。逆に、原理的に識別できる場合は、どちらの経路を通ったかを実際に観測するしないに関わらず干渉縞は現れない。不完全に識別できる場合は、識別できる度合いに応じて干渉縞は部分的に消滅する。

実際の実験では、2 つの経路のどちらを通過したかを原理的に識別可能かどうかを明確に判断することは容易ではない。その理由は、光子が通過する「スリット」は、通常、巨視的な数の原子から構成されているため、それらがスリットを通過する光子に与える影響を完全に把握することが不可能だからである。このため、たとえ干渉縞が消滅したとしても、その原因を特定することは困難である。系がそれを取りまく環境（今の場合はスリットを構成する原子）と相互作用する結果、干渉項が消滅する場合もある。これを環境との相互作用によるデコヒーレンス (decoherence) という。

このような疑問を払拭する究極のヤングの干渉実験として、イオンによる二重スリットの実験がなされた<sup>\*1</sup>。図 6.1(a) のように、電場によって真空中に静止させられた 2 個の

<sup>\*1</sup> U.Eichmann, et al., Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2359

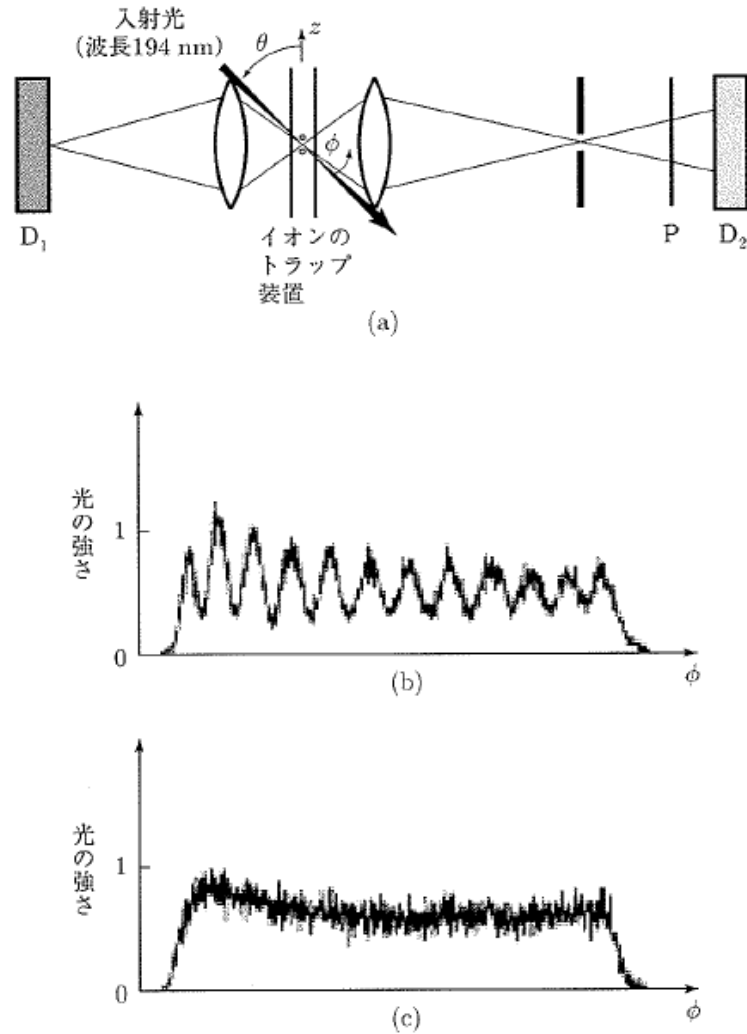


図 6.1 (a) 電場によって真空中にトラップされた 2 個の水銀イオンにより散乱された光の干渉実験の模式図。偏光した入射光はイオンにより散乱され、散乱光の角度依存性が検出器  $D_2$  で測定される。検出器  $D_1$  はトラップされたイオンの数をモニターする検出器である。検出器  $D_2$  の前に入射光と同じ偏光をもった光のみを通過させるフィルター  $P$  を置いた場合の測定結果が (b)、入射光の偏光と垂直な光のみを通過させるフィルターを置いた場合の測定結果が (c) である。[U. Eichmann, et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 2359 (1993) より転載]

水銀イオン ( $\text{Hg}^+$ ) によって光を散乱させる。それぞれの原子から散乱された光が検出器  $D_2$  で測定される。ここでは、トラップされた 2 個のイオンがスリットの役割を果たしており、イオンによる光の散乱はスリットによる光の回折に相当している。光の偏光は光子がスピン角運動量を持っていること現れである。従って、原子が光子を吸収あるいは放出すると原子の磁気量子数が変化する。光子がどちらの「スリット」(イオン) により回折されたかは、それぞれのイオンの磁気量子数が変化したかどうかを調べることで知ることができる。光子が通過した後どちらかの原子の磁気量子数が変化していれば、散乱光の光子の偏光は入射光子の偏光とは異なっており、光子はその原子によって散乱(あるいは「観測」)されたと言える。しかし、どちらの原子の磁気量子数も変化しなかった場合は、散乱光の光子の偏光は入射光子の偏光と同じであり、光子がどちらの原子に散乱されたかが原理的にわからない。実験結果は、入射光と同じ偏光の散乱光は干渉縞を示し(図 6.1(b))、入射光と垂直に偏光した散乱光は干渉縞を示さない(図 6.1(c))。その理由は、前者の場合は角運動量の保存則よりイオンの磁気量子数は変化しておらず、光子がどちらのイオンに散乱されたかを原理的に知ることができないからである。また、後者の場合は、どちらかのイオンの磁気量子数が変化しており、それを測定することにより光子がどちらのイオンに散乱されたのかを知ることができるからである。

二重スリットの実験においては、「干渉縞」が波動性を表し、光子がどちらのスリットを通過するかという「二者択一性」が粒子性を表している。粒子性と波動性は量子という統一された概念の相補的な側面を表しており、一方が強くと他方は弱められる。そして、そのどちらが強くと他方は弱められるかはどの情報が原理的に読み出せるかという実験状況によって決まる。

## 6.2 光の強度を表す演算子

干渉縞は光の強度の空間的・時間的変化として認識される。光の強度は古典論では電場の絶対値の自乗  $|\mathbf{E}|^2$  で与えられるが、量子論ではどのように表されるだろうか。これを調べるために、電場の演算子を次のように分解しよう。

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (6.1)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  と  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  はそれぞれ電場の正と負の振動数成分を表す。すなわち、(5.20) より

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)]^\dagger = \sum_{\mathbf{k}, \lambda=1,2} i \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \epsilon_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \quad (6.2)$$

ここで、 $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$  は、波数  $\mathbf{k}$ 、偏光  $\lambda$  の光子を 1 個消滅する演算子であり次の正準交換関係を満足する。

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = 0 \quad (6.3)$$

電磁場の状態は各モードの光子数が決まっているフォック状態

$$|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle \equiv |n_{\mathbf{k}_1\lambda_1}, n_{\mathbf{k}_2\lambda_2}, \dots\rangle \quad (6.4)$$

で展開できる。(6.3)を用いると、生成、消滅演算子が作用することでフォック状態が次のように変化することがわかる。

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}}|n_{\mathbf{k}\lambda} - 1\rangle, \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda} + 1}|n_{\mathbf{k}\lambda} + 1\rangle, \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = n_{\mathbf{k}\lambda}|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle \quad (6.5)$$

最後の関係式は、数演算子  $\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$  が、波数  $\mathbf{k}$ 、偏光  $\lambda$  をもった光子の個数の測定（すなわち、フォトンカウンティング）を記述することを示している。数演算子は、生成演算子を消滅演算子の左側に置く順序となっており、これを、**ノーマルオーダー** (normal order) という。光の強度は、量子論では単位時間あたりに測定される光子の数に比例するので、強度に対応する演算子は電場演算子をノーマルオーダーに並べた

$$\text{光の強度} \propto \langle \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = \sum_{\mathbf{k}, \lambda=1,2} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} n_{\mathbf{k}\lambda} \quad (6.6)$$

で与えられることがわかる。 $\sqrt{\hbar\omega_{\mathbf{k}}/(2\epsilon_0 V)}$  が光子1個当たりの電場強度であることを思い出そう。(6.6)は光の強度が光子一個当たりの電場強度を二乗したものに光子数をかけたものの和で与えられることを示している。量子論においては、測定する量に対応する演算子が何であるかはしばしば非自明であり、実際の測定に対応する演算子を注意深く決めないと物理的に不合理な結果に導かれる。

(6.6)式のようにノーマルオーダーにせずに単に電場演算子の自乗の期待値  $\langle \{n_{\mathbf{k}}\} | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) | \{n_{\mathbf{k}}\} \rangle$  は発散してしまう。実際、

$$\begin{aligned} & \langle \{n_{\mathbf{k}}\} | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}t) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}t) | \{n_{\mathbf{k}}\} \rangle \\ &= \langle \{n_{\mathbf{k}}\} | (\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}t))^2 + (\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}t))^2 + \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}t) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}t) | \{n_{\mathbf{k}}\} \rangle \\ &= \langle \{n_{\mathbf{k}}\} | 2\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}t) + [\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}t), \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}t)] | \{n_{\mathbf{k}}\} \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{\epsilon_0 V} n_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \end{aligned}$$

となり、右辺の最後の項が無大となる。この項は零点エネルギーの寄与である。ノーマルオーダーをとることは零点エネルギーの寄与を除外して光子のみを取り出す役割をしていることがわかる。



## 6.3 第二量子化形式による1光子干渉の理論

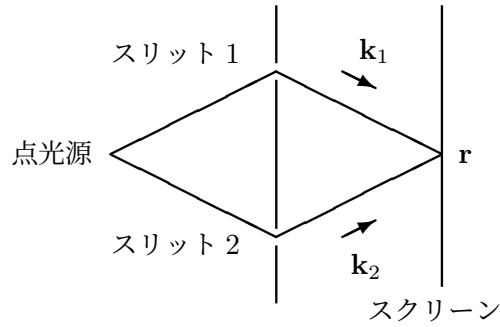


図 6.2 ヤングの干渉実験の模式図

本章の最初に紹介した「1個の光子が自分自身と干渉する」というディラックの言葉を数学的に表現してみよう。以下の議論では、光子の偏光は一つに固定されているものと仮定して、偏光方向を示す添え字  $\lambda$  は省略する。図 6.2 のスクリーン上の点  $\mathbf{r}$  における電場はスリット 1、2 を通過した光の重ね合わせとして書ける。

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)} = \hat{a}_{\mathbf{k}_1} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \mathbf{u}_1 + \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \mathbf{u}_2 \quad (6.7)$$

ここで、 $\mathbf{u}_1$ 、 $\mathbf{u}_2$  はスリットの幾何学的形状や各スリットから光子を観測する位置  $\mathbf{r}$  に至る光子の伝搬等に依存する因子である。1光子状態は次のように書ける。

$$|1 \text{ 光子} \rangle = \cos \theta |1, 0\rangle + \sin \theta |0, 1\rangle \quad (6.8)$$

ここで、 $|1, 0\rangle$ 、 $|0, 1\rangle$  はそれぞれ光子がスリット 1、2 を通過する波数が  $\mathbf{k}_1$ 、 $\mathbf{k}_2$  の光子の状態ベクトルを表している。これらの状態ベクトルは 1 に規格化されているものとする。すなわち、

$$\langle 1, 0 | 1, 0 \rangle = 1, \quad \langle 0, 1 | 0, 1 \rangle = 1 \quad (6.9)$$

しかし、光子がスリット 1 を通過する事象とスリット 2 を通過する事象は互いに排反事象なので、 $|1, 0\rangle$  と  $|0, 1\rangle$  は直交しなければならない。

$$\langle 1, 0 | 0, 1 \rangle = \langle 0, 1 | 1, 0 \rangle = 0 \quad (6.10)$$

これらから 1光子状態  $|1 \text{ 光子} \rangle$  は 1 に規格化されていることがわかる。

$$\langle 1 \text{ 光子} | 1 \text{ 光子} \rangle = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (6.11)$$

さて、(6.6) よりスクリーン上の位置  $\mathbf{r}$  で光子が検出される確率  $P(\mathbf{r})$  は次の量に比例する。

$$P(\mathbf{r}) \propto \langle 1 \text{ 光子} | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) | 1 \text{ 光子} \rangle \quad (6.12)$$

ここで

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r})|1 \text{ 光子} \rangle &= (\hat{a}_{\mathbf{k}_1} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \mathbf{u}_1 + \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \mathbf{u}_2)(\cos \theta |1, 0\rangle + \sin \theta |0, 1\rangle) \\ &= (e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \mathbf{u}_1 \cos \theta + e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \mathbf{u}_2 \sin \theta) |0, 0\rangle\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}P(\mathbf{r}) &\propto |e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \mathbf{u}_1 \cos \theta + e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \mathbf{u}_2 \sin \theta|^2 \\ &= |\mathbf{u}_1|^2 \cos^2 \theta + |\mathbf{u}_2|^2 \sin^2 \theta + 2\text{Re}[\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^* e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2)}] \sin \theta \cos \theta \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \phi)\end{aligned}\quad (6.13)$$

ここで、 $\text{Re}[A]$  は  $A$  の実部を表す。また、 $I_1 \equiv |\mathbf{u}_1|^2 \cos^2 \theta$ 、 $I_2 \equiv |\mathbf{u}_2|^2 \sin^2 \theta$  であり、 $\phi$  は  $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^* = |\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^*| e^{i\phi}$  で定義される位相である。(6.13) は、古典論の結果と一致する。従って、1光子干渉においては量子論と古典論との差異はない。

干渉縞が現れる度合いを表す量として次に定義される**干渉縞の明暗比** (fringe visibility) と呼ばれる量  $\nu$  がしばしば用いられる。

$$\nu = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (6.14)$$

これに (6.13) から得られる  $I_{\max}$ 、 $I_{\min}$  を代入すれば

$$\nu = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \leq 1 \quad (6.15)$$

が得られる。明暗比は  $I_1 = I_2$  の時最大値 1 を取りうる。

## 6.4 独立な光源からの光の干渉

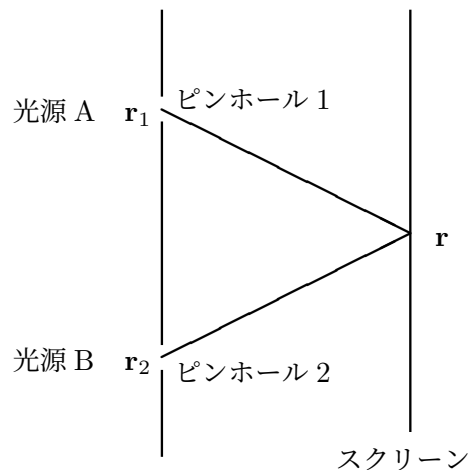


図 6.3 2つの独立な光源からの光の干渉

次に、2つの独立な光源から発せられた光が干渉するための条件を考察しよう。光源 A、B からスクリーンへ達する光子の消滅演算子をそれぞれ  $\hat{a}_A$ 、 $\hat{a}_B$  と書くと、スクリー

ン上の点  $\mathbf{r}$  における電場演算子の正の振動数成分は

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = \hat{a}_A e^{i\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}_A} + \hat{a}_B e^{i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}_B} \quad (6.16)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{r}_A = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_B = \mathbf{r} - \mathbf{r}_2$  である。また、式を簡単にするために、ピンホールの幾何学的形状等を反映する因子は省略した。光源の状態ベクトルを

$$|\phi\rangle_A |\psi\rangle_B \quad (6.17)$$

と書くと、二つの光源 A と B が独立であることは状態  $|\phi\rangle_A$  と  $|\psi\rangle_B$  が直交することによって表現される。

$${}_A\langle\phi|\psi\rangle_B = {}_B\langle\psi|\phi\rangle_A = 0 \quad (6.18)$$

さらに、各状態ベクトルは 1 に規格化されているものと仮定する。

$${}_A\langle\phi|\phi\rangle_A = {}_B\langle\psi|\psi\rangle_B = 1 \quad (6.19)$$

スクリーン上の位置  $\mathbf{r}$  で光子が検出される確率はノーマルオーダーされた光の強度演算子の期待値

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}) \rangle &= {}_A\langle\phi|\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_A|\phi\rangle_A + {}_B\langle\psi|\hat{a}_B^\dagger \hat{a}_B|\psi\rangle_B \\ &+ (e^{-i(\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}_A - \mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}_B)}) {}_A\langle\phi|\hat{a}_A^\dagger|\phi\rangle_A {}_B\langle\psi|\hat{a}_B|\psi\rangle_B + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (6.20)$$

に比例する。ここで、右辺の第 3 項とその複素共役 (complex conjugate, c.c.) な第 4 項が干渉効果を表している。これから二つの独立な光源からの光が干渉するためには

$${}_A\langle\phi|\hat{a}_A^\dagger|\phi\rangle_A \neq 0 \quad \text{かつ} \quad {}_B\langle\psi|\hat{a}_B|\psi\rangle_B \neq 0 \quad (6.21)$$

であることが必要十分である。これはどちらの光源の光の光子数も揺らいでいなくてはならないことを意味している。もし、光源 A が光子数状態  $|n\rangle$  であるとする、

$$\langle n|\hat{a}_A^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle = 0 \quad (6.22)$$

となり干渉縞は現れない。この実験的例として、単一原子からの蛍光を光源 A として用い、光源 B として位相が安定化されたレーザー光を用いる場合を考えよう。この場合、蛍光の強さが最大となる点では干渉が起こらないことが知られている。これは、蛍光の強さが最大になる時点で光子 1 個が原子から確実に放出されており、上記の (6.22) の場合が適用されるからである。

独立な光源からの干渉実験を説明するために、不確定性関係を使った次のような議論がなされることがある。今、 $\lambda$  を光の波長とし、 $\theta$  を 2 つの光源がスクリーン上の任意の点を見込む角度であるとする、その点付近での干渉縞の間隔は  $\lambda/\theta$  で与えられる。干渉縞が識別できるためには、検出器の位置の精度  $\Delta x$  が干渉縞の間隔  $\lambda/\theta$  よりも高い必要がある。すなわち、

$$\Delta x < \frac{\lambda}{\theta} \quad (6.23)$$

他方、不確定性関係より検出器の運動量の不確定性  $\Delta p_x$  は不等式

$$|\Delta p_x| \geq \frac{h}{\Delta x} > \frac{h}{\lambda} \theta \quad (6.24)$$

を満足しなければならない。光源 A、B から来た光子は  $x$  方向の運動量が違うだけなので、光子がどちらから来たかを知るためには、検出器の運動量の精度  $\Delta p_x$  が

$$|(p_A)_x - (p_B)_x| = |(h/\lambda) \sin(\theta/2) - (h/\lambda) \sin(-\theta/2)| \simeq \frac{h}{\lambda} \theta \quad (6.25)$$

よりも高い必要がある。すなわち、

$$\Delta p_x < \frac{h}{\lambda} \theta \quad (6.26)$$

しかし、この条件は (6.24) と矛盾する。別のいい方をすると、干渉縞を観測しようとして光子の位置を  $\lambda/\theta$  以上の精度で測定すると、測定された光子が A、B どちらの光源から来たのかが言えなくなる。しかし、上の反例 (6.22) が示しているように、光子がどちらの光源から来るのかが原理的に言えないということは干渉縞が現れるための必要条件ではあっても十分条件ではない。従って、上の議論で干渉を完全に説明できたとは言えない。

独立な 2 つの光源からの光が干渉することはマンデルらによって実証された\*2。2 つのレーザーの強度を吸収板で弱めて、光源と測定器の間に光子が一個以上存在しないような状況でも干渉縞が現れる実験が同じグループによってなされた\*3。これは、次のように理解することができる。レーザー光をコヒーレント状態で近似すると (5.3 節のグラウバーの定理参照)、光の状態ベクトルは

$$|\alpha\rangle_A |\beta\rangle_B \quad (6.27)$$

で与えられる。ここで、 $\alpha$ 、 $\beta$  はコヒーレント状態の振幅である。コヒーレント状態が消滅演算子の固有状態であること ((5.11) を参照) を思い出すと (6.20) の期待値は次のように書ける。

$$\langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}) \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| \cos(\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}_A - \mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}_B + \theta_\alpha - \theta_\beta) \quad (6.28)$$

ここで、 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta_\alpha}$ 、 $\beta = |\beta|e^{i\theta_\beta}$  である。このようにレーザー光の振幅  $\alpha$ 、 $\beta$  がどんなに小さくても干渉縞は現れる。

## 6.5 自発的対称性の破れ

2 つのレーザー光の干渉現象を完全に理解するためには、もう少し深い考察が必要である。現実のレーザー光の位相は自然放出のために時間的にゆっくりと揺らいでいる。従っ

\*2 G. Magyar and L. Mandel, Nature (London) **198**, 255 (1963); M. S. Lipset and L. Mandel, Nature (London) **199**, 553 (1963)

\*3 R. L. Pflieger and L. Mandel, J. Opt. Soc. Am. **58**, 946 (1968)

て、(6.28) が成立するためには位相が揺らぐ時間スケールに比べて観測時間は十分短くなければならない。それよりも長い時間でデータを積算すると (6.28) の位相差  $\theta_\alpha - \theta_\beta$  がランダムに分布する結果、干渉縞は図 6.3 のスクリーン上で時間とともに上下に移動し長時間平均すると消えてしまう。それ故、長時間平均が量子力学的アンサンブル平均に等しいと仮定すると、量子力学的期待値としては (6.28) の右辺の干渉縞は消える。それでは、実験で観測される (時間的に上下に移動する) 干渉縞は何を意味しているのだろうか。厳密に言うと、実験で観測される干渉縞は (6.20) のタイプの干渉 (これを 1 次干渉という) ではなく

$$\langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1) \rangle \quad (6.29)$$

という空間の 2 点における相関 (2 次干渉) の現れである (詳しくは 6.7 節を参照)。実際、干渉縞が現れる位置は時間的に変動するが縞全体が同時に移動するので、(6.29) を 2 点間の距離  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  の関数として見ると時間的に変化しない。2 つの独立なレーザー光の干渉実験では、我々は干渉縞の個別のピーク位置ではなくあるピークと隣のピークの相対的な位置関係から干渉縞を認識しているのである。これに対して、ヤングの干渉実験では、ピーク位置そのものも時間的に変動しない。

電磁場の位相は時間的に揺らぎ、長時間でみると 0 から  $2\pi$  まで一様に分布する。また、絶対位相が存在しないことから観測にかかる物理量はすべて位相の差に依存しなければならない。実際、(6.28) の例でも、干渉縞は  $\theta_\alpha$  と  $\theta_\beta$  の差  $\theta_\alpha - \theta_\beta$  に依存しているので、各々の位相を同じ値だけずらしても観測量には影響しない。

位相差  $\theta_\alpha - \theta_\beta$  が時間的にゆっくりと変化するというということを別にすれば、コヒーレント状態と 1 次干渉による記述 (6.28) が 2 つの独立なレーザー光の干渉という本質的には 2 次の干渉現象をよく再現していることは事実である。これはひとたびレーザー発振が起きると電場に長時間の時間的相関

$$\langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t + \tau) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (6.30)$$

が生じるからである。この相関関数がゼロでない値を保つ時間を **コヒーレンス時間** (coherence time)  $\tau_c$  と言うが、レーザー発振がおこると  $\tau_c$  は非常に長くなる。特に、 $\tau_c$  が観測時間よりもはるかに長い極限では位相の値があたかも  $\theta_\alpha$  と  $\theta_\beta$  に決まっているかのようにみなしていろいろな物理量を計算しても事実上差し支えはない。レーザー光では長時間  $\tau$  にわたり (6.30) の相関が保たれるのはレーザー光が光子の **ボース・アインシュタイン凝縮** (Bose-Einstein condensation) であるからである。ひとたびボース・アインシュタイン凝縮が起こると、位相が長距離あるいは長時間にわたって一定に保たれる。その結果、位相が 0 から  $2\pi$  まで一様に分布するという系が本来持っている **対称性が自発的に破れ** (spontaneous symmetry breaking)、(有限の時間で見ると) 位相がある値に定まっているように見える。しかし現実には、位相はゆっくりと変化し、十分長い時間が経過すると位相が 0 から  $2\pi$  まで一様に分布しているという系が本来持っている対称性 (これを U(1) ゲージ対称性という) が回復される。このように、自発的に破れた対称性を回

復させるモード（レーザー光の場合は、位相を揺らがせるモード）をゴールドストーンモード (Goldstone mode) という。

## 6.6 量子情報の消去とコヒーレンスの回復

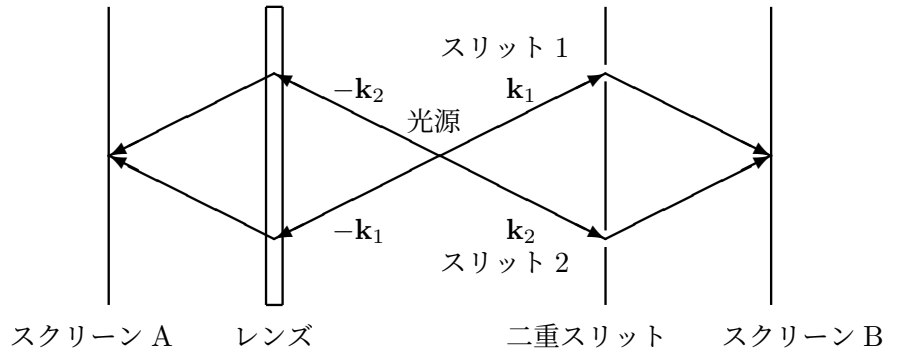


図 6.4 量子情報の消去と干渉縞の回復の実験の概念図

ある種の非線型結晶からは、反対の運動量を持った光子が 2 個同時に放出される。光源が点光源の場合、放出される光子は球面波となって等方的に放出される。図 6.4 のように光源の右側にスリット 1、2 が開いている板を置き、その右側のスクリーン B はそのスリットを通った光子のみが到達できるようにする。いずれかのスリットを光子が通過する事象のみを考える場合、光源から発生する光子の状態は次のように与えられる。

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_{\mathbf{k}_1}, 1_{-\mathbf{k}_1}\rangle + |1_{\mathbf{k}_2}, 1_{-\mathbf{k}_2}\rangle) \quad (6.31)$$

ここで、 $|1_{\mathbf{k}_i}, 1_{-\mathbf{k}_i}\rangle$  ( $i = 1, 2$ ) は波数が  $\mathbf{k}_i$  と  $-\mathbf{k}_i$  の光子対の状態を表している。このような状況下で次の問題を考える。

- スクリーン B 上に干渉縞は現れるか？
- スクリーン B に比べて、スクリーン A をより光源に近くに置き、A 上で光子を観測する場合、スクリーン B 上に干渉縞は現れるか？
- 逆にスクリーン A に比べて、スクリーン B をより光源に近くに置き、B 上で光子を観測する場合、経路の途中に 2 重スリットを持たないスクリーン A 上で干渉縞は現れるか？

まず、最初の問題を考える。スクリーン B 上の点  $\mathbf{r}$  に到達する光子の消滅演算子  $\hat{B}(\mathbf{r})$  は、スリット 1、2 を通過した光子の消滅演算子  $\hat{a}_{\mathbf{k}_1}$ 、 $\hat{a}_{\mathbf{k}_2}$  の線形結合

$$\hat{B}(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r})\hat{a}_{\mathbf{k}_1} + \beta(\mathbf{r})\hat{a}_{\mathbf{k}_2} \quad (6.32)$$

で書ける。ここで、 $\alpha(\mathbf{r})$ 、 $\beta(\mathbf{r})$  はスクリーン上の位置  $\mathbf{r}$  に依存する係数であるが、 $\hat{B}$  が正準交換関係  $[\hat{B}, \hat{B}^\dagger] = 1$  を満たすという条件から関係式  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  を満足しなければならない。スクリーン B 上の位置  $\mathbf{r}$  で光子を検出する確率は次の量に比例する。

$$\langle \Psi | \hat{B}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{B}(\mathbf{r}) | \Psi \rangle \quad (6.33)$$

ところが、これに状態 (6.31) を代入すると

$$\langle \Psi | \hat{B}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{B}(\mathbf{r}) | \Psi \rangle = \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{2} \quad (6.34)$$

となるので干渉縞は現れないことがわかる。光子がどちらのスリットを通過したのかを観測していないにもかかわらず干渉縞が現れないのは、スクリーン A 側に放出された光子の運動量が  $-\mathbf{k}_1$  か  $-\mathbf{k}_2$  かを測定することにより、反対側に放出された光子がどちらのスリットを通過したのかを知ることができるからである。これは、次のような定理として一般化することができる。

**定理.** 二つの直交する状態  $|\varphi\rangle$ 、 $|\chi\rangle$  と二つの状態  $|w_1\rangle$ 、 $|w_2\rangle$  がそれぞれ量子もつれの状態 (quantum entangled state)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi\rangle|w_1\rangle + |\chi\rangle|w_2\rangle) \quad (6.35)$$

にある場合、 $|w_1\rangle$  と  $|w_2\rangle$  は干渉しない。

2番目の問題に答えるために、スクリーン A 上の位置  $\mathbf{r}$  での光子の消滅演算子  $\hat{A}(\mathbf{r})$  を導入しよう。これは、波数  $-\mathbf{k}_1$ 、 $-\mathbf{k}_2$  の光子の消滅演算子の線形結合で表されるので

$$\hat{A}(\mathbf{r}) = \gamma(\mathbf{r})\hat{a}_{-\mathbf{k}_1} + \delta(\mathbf{r})\hat{a}_{-\mathbf{k}_2} \quad (6.36)$$

と書ける。スクリーン A 上の位置  $\mathbf{r}_A$  で光子を検出した直後の状態ベクトルは (6.31) に (6.36) を作用させることにより

$$|\Psi_A\rangle \propto \hat{A}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma(\mathbf{r}_A)|1_{\mathbf{k}_1}\rangle + \delta(\mathbf{r}_A)|1_{\mathbf{k}_2}\rangle) \quad (6.37)$$

に比例することがわかる。このとき、スクリーン B 上の位置  $\mathbf{r}_B$  で光子を検出する確率は次の量に比例する。

$$\langle \Psi_A | \hat{B}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{B}(\mathbf{r}) | \Psi_A \rangle \quad (6.38)$$

この式に (6.37) と (6.32) を代入すると

$$\langle \Psi_A | \hat{B}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{B}(\mathbf{r}) | \Psi_A \rangle \propto \frac{1}{2} |\alpha(\mathbf{r}_B)\gamma(\mathbf{r}_A) + \beta(\mathbf{r}_B)\delta(\mathbf{r}_A)|^2 \quad (6.39)$$

となり右辺を展開すると干渉項  $\text{Re}(\alpha^*(\mathbf{r}_B)\gamma^*(\mathbf{r}_A)\beta(\mathbf{r}_B)\delta(\mathbf{r}_A))$  が現れることがわかる。干渉縞が現れる理由は、スクリーン A 上で光子を測定すると (6.37) に示されているよう

に、状態の量子もつれが解消されるからである。このように、量子状態に関する情報を観測で消去することにより干渉縞を回復することが可能である。これを量子消去 (quantum erasure) という。

3番目の問題に関しては、(6.37)-(6.39)においてAとBの順序を入れ替えることにより、スクリーンA上に干渉縞が現れることがわかる。このような実験は最近、インスブルック大学のグループにより実証された\*4。

## 6.7 2光子干渉

### 6.7.1 空間的非局所相関

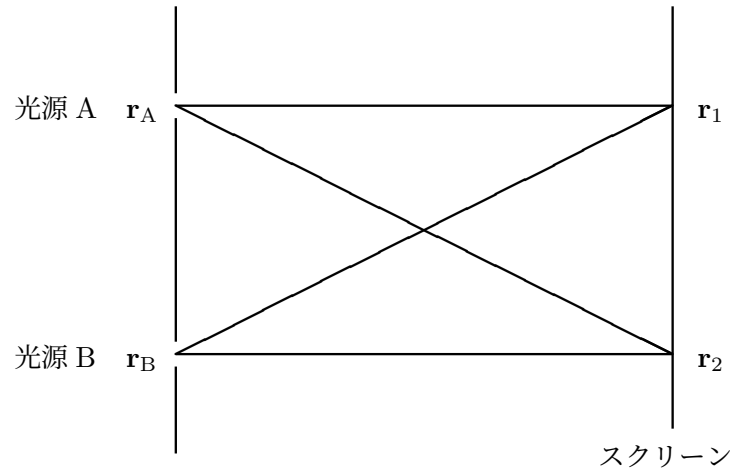


図 6.5 2光子干渉実験の模式図

干渉するのは1粒子だけとは限らない。このことを理解するために、2光子の干渉の問題を考えよう。1粒子の干渉現象は量子論と古典論で同じ結果となるが、2粒子以上の干渉現象は量子統計の効果により量子論と古典論で差が生じる。図6.5のように2つの光源A、Bからやって来る光子をスクリーン上の2点 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ で同時に検出する確率を考えよう。スクリーン上の点の電場の正の振動数成分は次のように光源A、Bからの電場の重ね合わせとして表され、

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1) = \hat{E}_A^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{A1} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_A)} + \hat{E}_B^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{B1} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_B)}, \quad (6.40)$$

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2) = \hat{E}_A^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{A2} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_A)} + \hat{E}_B^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{B2} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_B)} \quad (6.41)$$

と書くことができる。スクリーン上の位置 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ でそれぞれ光子を1個ずつ検出する同時検出確率 $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は古典的には各点での電場強度の積 $|E(\mathbf{r}_1)|^2 |E(\mathbf{r}_2)|^2$ に比例する。

\*4 A. Zeilinger, Rev. Mod. Phys. **71**, S288 (1999)



量子論では、6.2節で述べたように、電場演算子の積をノーマルオーダーに並べて

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = c \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1) \rangle \quad (6.42)$$

と書ける。ここで、 $c$  は定数である。右辺に (6.40)、(6.41) を代入すると

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = c \langle (\hat{E}_A^{(-)} e^{-i\mathbf{k}_{A1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_A)} + \hat{E}_B^{(-)} e^{-i\mathbf{k}_{B1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_B)}) (\hat{E}_A^{(-)} e^{-i\mathbf{k}_{A2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_A)} + \hat{E}_B^{(-)} e^{-i\mathbf{k}_{B2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_B)}) \times (\hat{E}_A^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{A2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_A)} + \hat{E}_B^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{B2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_B)}) (\hat{E}_A^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{A1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_A)} + \hat{E}_B^{(+)} e^{i\mathbf{k}_{B1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_B)}) \rangle \quad (6.43)$$

ここで、光の状態として光源 A と B から 1 光子ずつやってくる 2 光子状態  $|1\rangle_A |1\rangle_B$  を考える。このとき上式の期待値として残るのは次の項のみである。

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 2c \langle \hat{E}_A^{(-)} \hat{E}_B^{(-)} \hat{E}_A^{(+)} \hat{E}_B^{(+)} \rangle (1 + \cos \phi) \quad (6.44)$$

ここで

$$\begin{aligned} \phi &= \mathbf{k}_{A1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_A) + \mathbf{k}_{B2} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_B) - \mathbf{k}_{A2} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_A) - \mathbf{k}_{B1} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_B) \\ &\simeq \frac{2\pi}{L}(x_2 - x_1), \quad L \equiv \frac{\lambda}{\theta} \end{aligned} \quad (6.45)$$

であり、 $x_1, x_2$  はそれぞれ  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  の  $x$  成分である。

(6.44) から、(6.14) で定義された明暗比は光源の強さに関わらず 100% であることがわかる。これが純粋に量子力学的効果であることを理解するために、古典光学で考えるとどうなるか計算してみよう。古典光学では  $\hat{E}^{(+)}$  は古典的電場の正の周波数成分  $V$  で置き換えられる。

$$V_1 = V_A e^{i\mathbf{k}_{A1} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_A)} + V_B e^{i\mathbf{k}_{B1} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_B)}, \quad V_2 = V_A e^{i\mathbf{k}_{A2} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_A)} + V_B e^{i\mathbf{k}_{B1} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_B)} \quad (6.46)$$

光源 A, B からの光がランダムな位相をもつものと仮定すると  $V_A, V_B$  は絶対値をとる項のみが残り、

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = c \langle |V_1|^2 |V_2|^2 \rangle = c \left[ \langle (I_A + I_B)^2 \rangle + 2 \langle I_A I_B \rangle \cos \phi \right] \quad (6.47)$$

ここで、 $I_A = |V_A|^2$ 、 $I_B = |V_B|^2$  である。これから明暗比は

$$\nu = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2 \langle I_A I_B \rangle}{\langle (I_A + I_B)^2 \rangle} \leq \frac{1}{2} \quad (6.48)$$

となり、古典光学での明暗比は最大でも 50% であることがわかる。

(6.45) を (6.44) に代入し、スクリーン上で干渉縞が変化する方向だけを考え、それを  $x$  軸にとると

$$P(x_1, x_2) = A \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{L}(x_1 - x_2) \right) \quad (6.49)$$

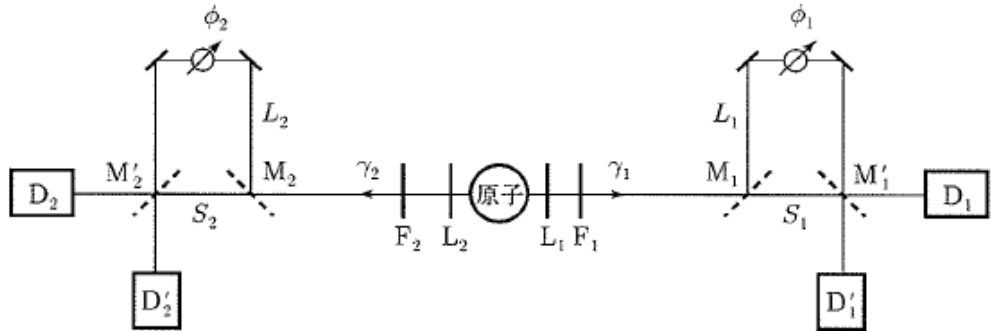


図 6.6 時間的非局所相関の実験の模式図。[J. D. Franson, Phys. Rev. Lett. **62**, 2205 (1989) より転載]

ここで、 $A = 2c \langle \hat{E}_A^{(-)} \hat{E}_B^{(-)} \hat{E}_A^{(+)} \hat{E}_B^{(+)} \rangle$  である。(6.49) から、光子がスクリーン上のある点  $x_2$  で検出されると、条件

$$\frac{2\pi}{L}(x_1 - x_2) = \pi(2n + 1) \rightarrow x_1 = x_2 + \frac{L}{2}(2n + 1) \quad (n \text{ は整数}) \quad (6.50)$$

を満たす他の点で光子が同時に検出される確率は 0 になる。このような**非局所相関**は 2 光子の確率振幅

確率振幅 (光源 A の光子が  $\mathbf{r}_1$  で検出され、かつ、光源 B の光子が  $\mathbf{r}_2$  で検出される) と  
 確率振幅 (光源 A の光子が  $\mathbf{r}_2$  で検出され、かつ、光源 B の光子が  $\mathbf{r}_1$  で検出される)

が干渉した結果生じたことが (6.49) の導出過程から理解できる。

古典光学の場合は、同時計測確率は

$$P(x_1, x_2) = A \left( 1 + \nu \cos \frac{2\pi}{L}(x_1 - x_2) \right), \quad \nu \leq \frac{1}{2} \quad (6.51)$$

で与えられるが、 $\nu \leq 1/2$  なので、ある点  $x_1$  で光子を検出した場合に別な点で光子を検出する確率をゼロにすることはできない。このように、完全な非局所相関は量子論に特有のものであるといえる。Ou と Mandel は、パラメトリック蛍光によって発生する光子対に対して  $P(x_1, x_2)$  を測定し、 $\nu > 1/2$  であることを実証した\*5。

## 6.8 時間的非局所相関

図 6.6 のように原子から放出された 2 個の光子がそれぞれ別々に検出される状況を考えよう\*6。図で  $L_{1,2}$  は光をコリメートするレンズ、 $F_1, F_2$  はそれぞれ波長  $\lambda_1, \lambda_2$  の光子

\*5 Z. Y. Ou and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2941

\*6 J. D. Franson, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2205

のみを通過させるフィルター、 $M_i, M'_i$  ( $i = 1, 2$ ) は、光ビームを半分に分けるビームスプリッターを表している。これにより、左右に進む2つの光子はそれぞれ短い経路  $S_{1,2}$  と長い経路  $L_{1,2}$  に別れて通過し、それらがビームスプリッターで再び重ね合わさって検出器  $D_i, D'_i$  ( $i = 1, 2$ ) で測定される。長い経路と短い経路の光路差は左右で同じにしてあり、光路差を光速で割った時間を  $\Delta T$  と書く。 $\phi_i$  は長い経路を通った光の位相をずらす役割を果たす。電磁場の偏光は1つに決まっているものと仮定すると、検出器  $D_1$  における電場の正の振動子成分の演算子は

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{1}{2}\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) + \frac{1}{2}e^{i\phi_1}\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - \Delta T) \quad (6.52)$$

で与えられる。同様にして、検出器  $D_2$  における電場の演算子は

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) = \frac{1}{2}\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) + \frac{1}{2}e^{i\phi_2}\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \Delta T) \quad (6.53)$$

で与えられる。従って、検出器  $D_1$  と  $D_2$  で光子が同時に検出されるレート  $R_c$  は次の量に比例する。

$$R_c = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t)\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t)\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t)\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) \rangle \quad (6.54)$$

これに (6.52)、(6.53) を代入して、光子が同時に検出される事象は、左右に放出された光子が共に短い経路 ( $S_1$  と  $S_2$ ) を通るか、または、共に長い経路 ( $L_1$  と  $L_2$ ) を通るかのいずれかであることを注意すると

$$R_c = \frac{1}{16} \langle [\hat{E}_0^{(-)}(\mathbf{r}_1, t)\hat{E}_0^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) + e^{-i(\phi_1+\phi_2)}\hat{E}_0^{(-)}(\mathbf{r}_1, t - \Delta T)\hat{E}_0^{(-)}(\mathbf{r}_2, t - \Delta T)] \times [\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) + e^{i(\phi_1+\phi_2)}\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - \Delta T)\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \Delta T)] \rangle \quad (6.55)$$

が得られる。

議論をより具体的にするために、2つの光子の放出が図 6.7 のようにカスケード的に起こる状況を考えよう。図で  $\tau_1$  と  $\tau_2$  はそれぞれ準位 1 と 2 の寿命であり、 $\tau_2 \ll \tau_1$  であると仮定する。このとき、

$$\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2}e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_1 t)}e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 - \omega_2 t)} \quad (6.56)$$

とおくと

$$\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - \Delta T)\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \Delta T) = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}\hat{a}_{\mathbf{k}_2}e^{i(\omega_1 + \omega_2)\Delta T}e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_1 t)}e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 - \omega_2 t)} \quad (6.57)$$

となる。ここで、 $\omega_1, \omega_2$  はイベントごとに揺らぐが両者の和

$$\omega_1 + \omega_2 = (E_1 - E_3)/\hbar + \Delta\omega \equiv \Delta E/\hbar + \Delta\omega, \quad \Delta E \equiv E_1 - E_3 \quad (6.58)$$

と  $\Delta E/\hbar$  との差  $\Delta\omega$  は、準位 1, 2 の  $\tau_1, \tau_2$  と

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \quad (6.59)$$

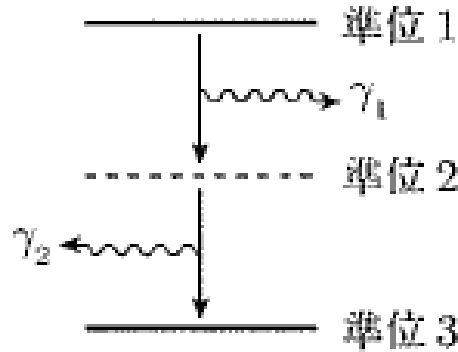


図 6.7 カスケード的に起こる 2 光子放出。準位 1 に励起された原子は  $\tau_1$  程度の時間の後に準位 2 へ遷移して光子  $\gamma_1$  を放出する。準位 2 の原子は  $\tau_2$  程度の時間の後に準位 3 へと遷移して光子  $\gamma_2$  を放出する。 $\tau_2 \ll \tau_1$  であれば、2 光子の放出はカスケード的に起こる。

なる関係がある。従って、 $\Delta T$  を  $\Delta T \ll \tau_1, \tau_2$  となるようにすると  $\Delta\omega\Delta T \ll 1$  なので

$$\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - \Delta T)\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - \Delta T) \simeq e^{i\frac{\Delta E\Delta T}{\hbar}}\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)\hat{E}_0^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \quad (6.60)$$

となる。これと (6.56) を (6.55) に代入すると

$$R_c \propto |1 + e^{i(\Delta E\Delta T/\hbar + \phi_1 + \phi_2)}| = 4\cos^2\left[\frac{(\Delta E\Delta T/\hbar + \phi_1 + \phi_2)}{2}\right] \quad (6.61)$$

となり振動する。逆に、 $\Delta T \gg \tau_1, \tau_2$  の場合は、振動は起こらない。この振動現象は、短い経路を通った 2 光子の確率振幅と長い経路を通った 2 光子の確率振幅が干渉する結果生じる。これは、短い経路を通過した光子と長い経路を通過した光子は、 $\Delta T$  が寿命  $\tau_1$  と  $\tau_2$  よりも短い限り、時間とエネルギーの不確定性関係により区別ができないために起こる 2 光子干渉現象である。

## 6.9 時間的ヤングの干渉実験

ヤングの干渉実験は空間的に離れたスリットを通過した光子の干渉であるが、離れた時刻に物質表面から反射した光子が干渉することを観測した実験が最近報告された<sup>\*7</sup>。ITO(indium tin oxide)というメタマテリアルを用いて、反射率を光のサイクル程度の短時間(数百 fs)でスイッチすることで、数百フェムト秒離れた 2 つのパルスを作り出し、それらがの周波数スペクトルが入射光の周波数よりも 10THz 程度離れたところまで振動することが観測された。これはいわば過去の光と未来の光が干渉したことを示す実験と言える。

<sup>\*7</sup> R. Tirole, et al., Nat. Phys. <https://www.nature.com/articles/s41567-023-01993-w>

## 6.10 2 粒子干渉の一般論

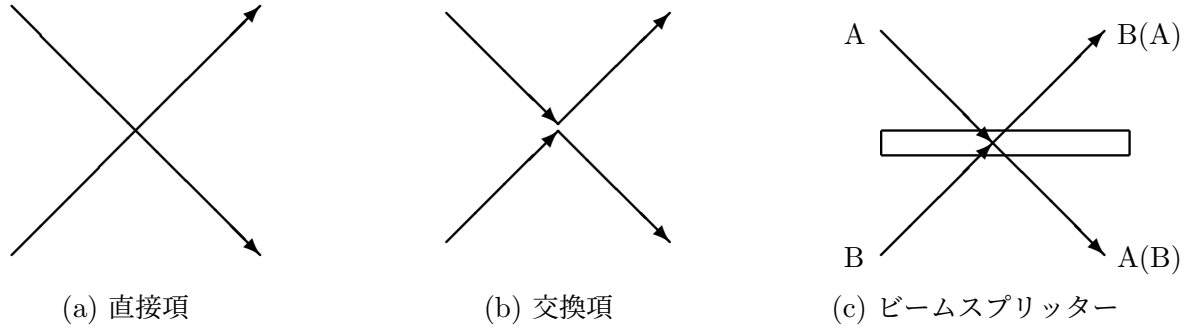


図 6.8 同種 2 粒子の確率振幅の干渉

同種 2 粒子の干渉の本質を理解するために、2 粒子が  $A$  または  $B$  の 2 つの状態しか取らない場合を考える。このとき、初期状態として

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle_1|B\rangle_2 + e^{i\theta}|B\rangle_1|A\rangle_2) \quad (6.62)$$

と書ける状態を考えよう。ここで、右辺の第一項は**直接項** (direct term)、第二項は粒子を交換した**交換項** (exchange term) と呼ばれる。 $\theta$  は、同種粒子を交換する際につく位相で、粒子が光子のようにボソンの場合は 0、電子のようにフェルミオンの場合は  $\pi$  をとる。いま、図 6.8(c) のように 2 粒子が上下方向からやってきてビームスプリッターで一部分透過させ残りを反射させることを考える。ビームスプリッターの作用  $\hat{U}$  は、 $A$ 、 $B$  それぞれの状態を次のように混ぜることである。

$$\hat{U}|A\rangle = \alpha|A\rangle + \gamma|B\rangle, \quad (6.63)$$

$$\hat{U}|B\rangle = \beta|A\rangle + \delta|B\rangle \quad (6.64)$$

ここで、係数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は  $\hat{U}$  がユニタリー作用素であることから条件

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1, \quad |\beta|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad \alpha^*\beta + \gamma^*\delta = 0 \quad (6.65)$$

あるいは、これから

$$\alpha = e^{i\theta_\alpha} \cos \phi, \quad \beta = e^{i\theta_\beta} \sin \phi, \quad \gamma = -e^{i(\theta_\alpha - \theta_\beta + \theta_\delta)} \sin \phi, \quad \delta = e^{i\theta_\delta} \cos \phi \quad (6.66)$$

と表される。(6.62) にユニタリ演算子  $\hat{U}$  を作用させると

$$\begin{aligned} \hat{U}|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha|A\rangle_1 + \gamma|B\rangle_1)(\beta|A\rangle_2 + \delta|B\rangle_2) + e^{i\theta}(\beta|A\rangle_1 + \delta|B\rangle_1)(\alpha|A\rangle_2 + \gamma|B\rangle_2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(1 + e^{i\theta})(\alpha\beta|A\rangle_1|A\rangle_2 + \gamma\delta|B\rangle_1|B\rangle_2) + (\alpha\delta + e^{i\theta}\beta\gamma)(|A\rangle_1|B\rangle_2 + e^{i\theta}|A\rangle_2|B\rangle_1)] \end{aligned} \quad (6.67)$$

ビームスプリッターの透過率が 50% のときは、 $\phi = \pi/4, \theta_\alpha = \theta_\beta = \theta_\delta = 0$  とおくと、(6.67) は

$$\hat{U}|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1 + e^{i\theta})(|A\rangle_1|A\rangle_2 - |B\rangle_1|B\rangle_2) + (1 - e^{i\theta})(|A\rangle_1|B\rangle_2 + e^{i\theta}|A\rangle_2|B\rangle_1)] \quad (6.68)$$

したがって、粒子がボソンの場合 ( $\theta = 0$ ) は

$$\hat{U}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle_1|A\rangle_2 - |B\rangle_1|B\rangle_2) \quad (6.69)$$

となり、2 粒子は必ず同じ側に現れる。このようにボソンは 2 粒子干渉の結果として集まりあう傾向にあり、これを**バンチング効果** (bunching) と呼ばれる。他方、フェルミオンの場合 ( $\theta = \pi$ ) は

$$\hat{U}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle_1|B\rangle_2 - |A\rangle_2|B\rangle_1) \quad (6.70)$$

となり、2 粒子は必ず反対側に現れることがわかる。このようにフェルミオンは互いに避けあう傾向にあり、これを**アンチバンチング効果** (antibunching) と呼ばれる。フェルミオンが避けあう効果は**パウリの排他律** (Pauli's exclusion principle) として知られているが、上記の議論からパウリの排他律が 2 粒子干渉の結果と解釈できることがわかる。このような実験は、光子に対してはホン等<sup>\*8</sup>、電子に対してはリウ等によってなされた<sup>\*9</sup>。

<sup>\*8</sup> C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987)

<sup>\*9</sup> R. C. Liu, B. Odom, Y. Yamamoto, and S. Tarucha, Nature **391**, 263 (1998)

## 第7章

# 原子と光の相互作用

### 7.1 原子と光との相互作用

原子のエネルギー準位は等間隔ではない。例えば、水素原子のエネルギー準位は

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \simeq -\frac{13.6}{n^2} \text{eV} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えられ、隣り合ったエネルギー準位間隔  $E_{n+1} - E_n$  はすべて異なっている。そこで、原子と相互作用する光子のエネルギー  $\hbar\omega_0$  を原子の特定の2つの準位  $m$  と  $n$  のエネルギーの差  $E_m - E_n$  にほぼ等しくとれば、原子の他の準位は光との相互作用に関与しなくなり、原子を  $m$  と  $n$  の2準位で記述するだけで十分となる。このように近似された原子を **2準位原子** (two-level atom) と呼ぶ。このような近似は、周波数が決まったレーザー光と原子が相互作用する場合や、極めて高い反射率を持つ鏡に囲まれた電磁波の波長程度の微小な空間 (これを微小共振器という) に閉じ込められた原子が電磁場と相互作用する場合に有効である。2準位原子は、量子コンピューターの基本単位としても重要である。これを **量子ビット**、または、英語の頭文字 (quantum bit) をとって **キュービット** (qubit) と呼ばれる。本章では2準位原子と光との相互作用のを題材として、量子力学の様々な側面について議論する。

### 7.2 ジェインズーカミングス模型

2準位原子を考え、エネルギーの高い準位を上準位、低い準位を下準位と呼ぼう。上準位にある原子の状態を  $|u\rangle$ 、下準位にある原子の状態を  $|d\rangle$  と記す。このとき、原子の状態は2次元ベクトルで記述される。

$$|u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

原子のハミルトニアンは、2準位間のエネルギーの差を  $\hbar\omega$  とし、両者の中間をエネルギーの原点にとると次のように書ける。

$$\hat{H}_{\text{atom}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z. \quad (7.2)$$

ここで、 $\hat{\sigma}_z$  はパウリ行列 (Pauli matrix) の  $z$  成分である。

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

このとき、原子に対するシュレーディンガー方程式は次のように書ける。

$$\hat{H}_{\text{atom}}|u\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|u\rangle, \quad (7.4)$$

$$\hat{H}_{\text{atom}}|d\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega|d\rangle \quad (7.5)$$

下準位にある原子を上準位に遷移させる演算子を昇演算子 (raising operator) といい、 $\hat{\sigma}_+$  と記す。逆に、上準位にある原子を下準位に遷移させる演算子を降演算子 (lowering operator) といい、 $\hat{\sigma}_-$  と記す。これらをまとめて昇降演算子 (raising and lowering operators) と呼ぶ。昇降演算子を行列表示すると

$$\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

と書け、これらが次の性質を満たしていることは容易に示せる。

$$\hat{\sigma}_+|d\rangle = |u\rangle, \quad \hat{\sigma}_+|u\rangle = 0, \quad \hat{\sigma}_-|u\rangle = |d\rangle, \quad \hat{\sigma}_-|d\rangle = 0 \quad (7.7)$$

昇降演算子はパウリ行列の  $x$  成分  $\hat{\sigma}_x$  と  $y$  成分  $\hat{\sigma}_y$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

を用いて次のように表すことができる。

$$\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y) \quad (7.9)$$

この時、次の交換関係が成立することがわかる。

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z, \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_+] = 2\hat{\sigma}_+, \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_-] = -2\hat{\sigma}_- \quad (7.10)$$

2 準位原子が、周波数が  $\omega_0$  の単一周波数の電磁場と相互作用する場合を考えよう。電磁場のハミルトニアンは零点エネルギーを無視すると  $\hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a}$  と書ける。原子と電磁場の相互作用の素過程は

下準位にある原子が光子を1個吸収して上準位へと遷移する過程 =  $\hat{\sigma}_+\hat{a}$

上準位にある原子が光子を1個放出して下準位へと遷移する過程 =  $\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger$

で記述される。

量子力学的には、上準位にある原子が光子を吸収して下準位に遷移したり、下準位にある原子が光子を放出して上準位へ遷移する過程も許される。しかし、このような過程は、エネルギーと時間の不確定性から決まる短い時間

$$\Delta t \sim (\omega + \omega_0)^{-1} \quad (7.11)$$



の間でしか起こりえず、その効果は多くの場合無視できる。このような効果は無視する近似を**回転波近似** (rotating-wave approximation) と呼ぶ。以下では、回転波近似を用いる。このとき原子と電磁場との相互作用ハミルトニアンは

$$\hbar g(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)$$

と書ける。ここで  $\hbar g$  は相互作用の強さを表す定数である。こうして2準位原子と単一モードの電磁場との相互作用を記述するハミルトニアンは次のように書ける。

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \frac{1}{2} \hbar \omega \hat{\sigma}_z + \hbar \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \quad (7.12)$$

ここで、電磁場の零点エネルギー  $\hbar \omega/2$  は定数なので無視した。(7.12) は**ジェインズーカミングス ハミルトニアン** (Jaynes-Cummings Hamiltonian) と呼ばれる。

### 7.3 ラビ分裂とラビ振動

ハミルトニアン (7.12) のエネルギー固有値を求めよう。シュレーディンガー方程式

$$\hat{H}_{\text{JC}}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (7.13)$$

の固有関数は次の形をとる。

$$|\Psi\rangle = \sin \theta |u, n\rangle + \cos \theta |d, n+1\rangle \quad (7.14)$$

ここで、 $|u, n\rangle$  は、原子が上準位  $|u\rangle$  にあり、光子が  $n$  個存在する状態を表すものとする。また、 $|d, n+1\rangle$  は、原子が下準位  $|d\rangle$  にあり、光子が  $n+1$  個存在する状態を表している。ジェインズーカミングス模型では、 $n = 0, 1, 2, \dots$  の各値に対して、状態  $|u, n\rangle$  と  $|d, n+1\rangle$  だけが結合する。そこで、(7.14) を (7.13) に代入して固有値方程式を解くと次のような二つの固有値とそれに対応する固有状態が得られる。

$$E_+ = \hbar \omega_0 (n+1/2) + \hbar \Delta_n/2, \quad |\Psi_+\rangle = \sin \theta_n |u, n\rangle + \cos \theta_n |d, n+1\rangle \quad (7.15)$$

$$E_- = \hbar \omega_0 (n+1/2) - \hbar \Delta_n/2, \quad |\Psi_-\rangle = \cos \theta_n |u, n\rangle - \sin \theta_n |d, n+1\rangle \quad (7.16)$$

ここで、 $\Delta_n \equiv \sqrt{4g^2(n+1) + \delta^2}$ 、また、 $\delta \equiv \omega - \omega_0$  は光の周波数と原子の共鳴周波数のずれを表しており、**離調周波数** (detuning frequency) と呼ばれる。また、 $\sin \theta_n$  と  $\cos \theta_n$  は次のように与えられる。

$$\sin \theta_n = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + 4g^2(n+1)}}, \quad \cos \theta_n = \frac{\Delta_n - \delta}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + 4g^2(n+1)}} \quad (7.17)$$

(7.15)、(7.16) から、電磁場と結合した原子の共鳴エネルギー準位が二つに分裂し、その差が

$$\Delta E \equiv E_+ - E_- = \hbar \Delta_n = \hbar \sqrt{4g^2(n+1) + \delta^2} \quad (7.18)$$

で与えられることがわかる。これを**ラビ分裂** (Rabi splitting) と言う。特に、はじめ電磁場が真空状態 ( $n = 0$ ) にあっても、原子のエネルギー準位は  $\hbar\sqrt{4g^2 + \delta^2}$  だけ分裂する。これを**真空ラビ分裂** (vacuum Rabi splitting) という\*<sup>1</sup>。

次に、ジェインズーカミングス模型における状態の時間発展を調べる。時刻  $t = 0$  で原子は上準位  $|u\rangle$  にあり、電磁場は光子数状態  $|n\rangle$  にあるとしよう。

$$|\Psi(t=0)\rangle = |u\rangle|n\rangle \equiv |u, n\rangle \quad (7.19)$$

系の時間発展はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_n(t)\rangle = \hat{H}_{\text{JC}}|\Psi_n(t)\rangle \quad (7.20)$$

に従う。(7.20) を形式的に積分すると

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{JC}}t}|\Psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{JC}}t}|u, n\rangle \quad (7.21)$$

と書ける。ここで、(7.15)、(7.16) より状態  $|u, n\rangle$  がハミルトニアン  $\hat{H}_{\text{JC}}$  の固有状態  $|\Psi_{\pm}\rangle$  を用いて次のように展開できることがわかる。

$$|u, n\rangle = \sin\theta_n|\Psi_+\rangle + \cos\theta_n|\Psi_-\rangle$$

これを (7.21) に代入して、状態  $|\Psi_{\pm}\rangle$  の固有エネルギーが  $E_{\pm}$  であることを使うと、

$$\begin{aligned} |\Psi_n(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{JC}}t}(\sin\theta_n|\Psi_+\rangle + \cos\theta_n|\Psi_-\rangle) = \sin\theta_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}|\Psi_+\rangle + \cos\theta_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}|\Psi_-\rangle \\ &= (e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}\sin^2\theta_n + e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}\cos^2\theta_n)|u, n\rangle \\ &\quad + (e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t})\sin\theta_n\cos\theta_n|d, n+1\rangle \end{aligned}$$

これに (7.15)、(7.16) の  $E_{\pm}$  を代入すると次の結果が得られる。

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{-i\omega_0(n+1/2)t} \left[ \left( \cos\frac{\Delta_n t}{2} + i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\cos 2\theta_n \right) |u, n\rangle - i\sin\frac{\Delta_n t}{2}\sin 2\theta_n |d, n+1\rangle \right] \quad (7.22)$$

ここで、(7.17) より

$$\sin 2\theta_n = 2\sin\theta_n\cos\theta_n = \frac{4g\sqrt{n+1}(\Delta_n - \delta)}{(\Delta_n - \delta)^2 + 4g^2(n+1)} \quad (7.23)$$

なので離調周波数  $\delta$  が大きいほど原子は下準位へ遷移しにくくなる。逆に、両者が共鳴する場合 ( $\omega_0 = \omega$ ,  $\delta = 0$ ) は、 $\Delta_n = 2g\sqrt{n+1}$ ,  $\sin 2\theta_n = 1$  となるので、系の時間発展は次のように与えられる。

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{-i(n+1/2)\omega t} \left[ \cos(g\sqrt{n+1}t)|u, n\rangle - i\sin(g\sqrt{n+1}t)|d, n+1\rangle \right] \quad (7.24)$$

\*<sup>1</sup> ラビ分裂の実験例は M. G. Raizen, R. J. Thompson, R. J. Brecha, H. J. Kimble, and H. J. Carmichael, Phys. Rev. Lett. **63**, 240 (1989)

(7.24) から時刻  $t$  に原子が上準位に見出される確率  $P_{\text{up}}(t)$  および下準位に見出される確率  $P_{\text{down}}(t)$  はそれぞれ次のように与えられる。

$$P_{\text{up}}(t) = |\langle u, n | \Psi_n(t) \rangle|^2 = \cos^2(g\sqrt{n+1}t), \quad (7.25)$$

$$P_{\text{down}}(t) = |\langle d, n+1 | \Psi_n(t) \rangle|^2 = \sin^2(g\sqrt{n+1}t) \quad (7.26)$$

また、時刻  $t$  における光子数の期待値は次のように与えられる。

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = \langle \Psi_n(t) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \Psi_n(t) \rangle = n + \sin^2(g\sqrt{n+1}t) = n + P_{\text{down}}(t) \quad (7.27)$$

このように原子は決まった周波数

$$\Omega_{\text{Rabi}} = g\sqrt{n+1} \quad (7.28)$$

で光子の吸収と放出を繰り返す。これを**ラビ振動** (Rabi oscillation)、また  $\Omega_{\text{Rabi}}$  を**ラビ周波数** (Rabi frequency) と言う。特に、電磁場の初期状態が真空の場合、すなわち、 $n=0$  の場合もラビ振動が起こる\*2。

## 7.4 崩壊現象と復活現象

電磁場の初期状態がコヒーレント状態 (5.2 節参照)

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (7.29)$$

である場合を考えよう。原子が上準位にあるとすると全系の初期状態は

$$|u, \alpha; t=0\rangle = |u\rangle \otimes |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |u, n\rangle \quad (7.30)$$

と書ける。シュレーディンガー方程式の線形性から状態 (7.30) の時間発展は

$$|u, \alpha; t\rangle = \hat{U}(t) |u, \alpha; t=0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{U}(t) |u, n\rangle \quad (7.31)$$

と書ける。これに、(7.24) を代入すると

$$|u, \alpha; t\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+1/2)\omega t} \left[ \cos(g\sqrt{n+1}t) |u, n\rangle - i \sin(g\sqrt{n+1}t) |d, n+1\rangle \right] \quad (7.32)$$

\*2 ラビ振動の実験例は G. Rempe, H. Walther, and N. Klein, Phys. Rev. Lett. **58** 353-356 (1987)

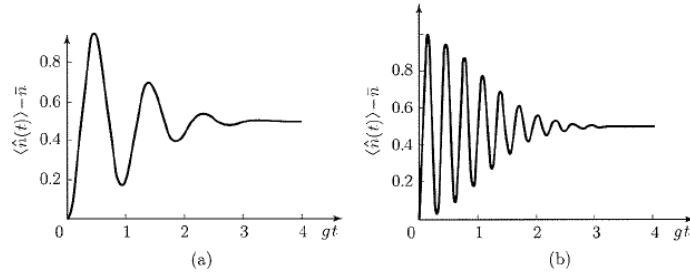


図 7.1 平均光子数の短時間での時間変化。振動の振幅が減衰する様子がわかる。初期状態は原子が上準位、電磁場はコヒーレント状態で、初期状態の平均光子数は (a) では  $|\alpha|^2 = 10$ 、(b) では  $|\alpha|^2 = 100$  である。

が得られる。平均光子数の時間発展は状態 (7.32) に対する光子数演算子の期待値として求められる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{n}(t) \rangle &\equiv \langle u, \alpha, t | \hat{a}^\dagger \hat{a} | u, \alpha, t \rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} [n \cos^2(g\sqrt{n+1}t) + (n+1) \sin^2(g\sqrt{n+1}t)] \\
 &= \bar{n} + e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \sin^2 g\sqrt{n+1}t
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

ここで、 $\bar{n} \equiv |\alpha|^2$  である。これを図示したものが図 7.1 である。平均光子数は時間的に振動するが、その振幅は時間とともに減衰することがわかる。これを、**崩壊現象** (collapse phenomenon) という。振動が減衰する理由は、コヒーレント状態がいろいろな光子数状態の重ね合わせであることから、様々なラビ振動数をもった成分が (7.33) のように重なり合い、成分間の位相差が時間の経過とともにばらばらになるからである。崩壊現象はいろいろな振動数を持った成分が共存することから生じるので、光の強度が連続的な値をとる古典論の場合にも起こる。

図 7.2 は、平均光子数  $\langle \hat{n}(t) \rangle$  の長時間での振る舞いを示したものである。興味深いことに、図 7.1 のようにいったんは完全に減衰したように見える振動が十分長い時間の後に復活する。この**復活現象** (revival phenomenon) は、光子のエネルギーが量子化されているために起こり、電磁場の量子化の証拠の一つである (7.5 節を参照)\*3。崩壊現象とは

\*3 G. Rempe, H. Walther, and N. Klein, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 353

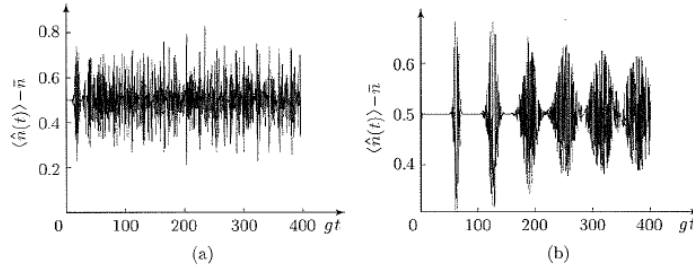


図 7.2 平均光子数の長時間での時間変化。いったん減衰した振動が、再び復活する様子がわかる。初期状態は原子が上準位、電磁場はコヒーレント状態で、初期状態の平均光子数は (a) では  $|\alpha|^2 = 10$ 、(b) では  $|\alpha|^2 = 100$  である。

異なり復活現象は、古典論のように光の強度が連続的な値を取る場合は生じない量子論に特有の現象である。

図 7.2 を見ると復活現象も周期的に起こっているように見える。その周期を近似的に求めよう。(7.33) より

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = \bar{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\bar{n}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{i2g\sqrt{n+1}t} \right\} \quad (7.34)$$

ここで  $\operatorname{Re}\{\dots\}$  は  $\{\}$  内の実部をとることを意味している。 $\{\}$  内の指数部分は  $\delta n = n - \bar{n}$  とおくと、ポアソン分布の粒子数揺らぎが  $\sqrt{\bar{n}}$  なので  $\bar{n} \gg 1$  ならば  $|\delta n|/\bar{n} = 1/\sqrt{\bar{n}} \ll 1$  となるので、

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{\bar{n}} \left( 1 + \frac{\delta n + 1}{\bar{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{\bar{n}} \left( 1 + \frac{\delta n + 1}{2\bar{n}} \right) = \frac{n + \bar{n} + 1}{2\sqrt{\bar{n}}} \quad (7.35)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{i2g\sqrt{n+1}t} &\simeq e^{ig\sqrt{\bar{n}}(1+\frac{1}{\bar{n}})t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{i\frac{gt}{\sqrt{\bar{n}}}n} = e^{ig\sqrt{\bar{n}}(1+\frac{1}{\bar{n}})t} \exp\left(\bar{n}e^{i\frac{gt}{\sqrt{\bar{n}}}}\right) \\ &= e^{ig\sqrt{\bar{n}}(1+\frac{1}{\bar{n}})t} \exp\left[\bar{n} \left( \cos \frac{gt}{\sqrt{\bar{n}}} + i \sin \frac{gt}{\sqrt{\bar{n}}} \right)\right] \end{aligned} \quad (7.36)$$

これを (7.34) に代入すると

$$\langle \hat{n}(t) \rangle \simeq \bar{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\bar{n}(1-\cos \frac{gt}{\sqrt{\bar{n}}})} \cos \left\{ g\sqrt{\bar{n}} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\bar{n}} \right) t + \frac{\sqrt{\bar{n}}}{g} \sin \frac{gt}{\sqrt{\bar{n}}} \right] \right\} \quad (7.37)$$

右辺の最後の余弦項はラビ振動を表しており、その前の指数因子

$$f(t) = e^{-\bar{n}\left(1 - \cos \frac{gt}{\sqrt{\bar{n}}}\right)} \quad (7.38)$$

がラビ振動の振幅の時間変化（包絡線）を記述している。 $f(t)$  は  $t = 0$  で値 1 をとるが、 $t \ll \sqrt{\bar{n}}/g$  なる時間では  $f(t) \simeq e^{-(gt)^2/2}$  と展開できる。従って、振動の崩壊は

$$T_{\text{collapse}} \simeq \frac{1}{g} \quad (7.39)$$

程度の時間で起こることがわかる。他方、復活現象の周期は (7.38) から

$$T_{\text{revival}} = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\bar{n}} \quad (7.40)$$

で与えられることがわかる。

## 7.5 量子回帰定理

古典力学では粒子が運動する領域が有限の体積内に限られている場合、任意の初期状態に対してそれにいくらかでも近い状態に有限の時間で戻ってくることが示される。これを**ポアンカレの回帰定理** (Poincaré's recurrence theorem) という。量子力学においては、有限系のエネルギー準位は離散的であるために、系の時間発展は周期運動の重ね合わせとして記述することができる。このことから、回帰定理の量子力学版というべき次の定理が導かれる\*4。

**量子回帰定理** (quantum recurrence theorem) : 任意の初期時刻  $t_0$  と任意の正の数  $\epsilon$  に対して  $\|\Psi(T)\rangle - |\Psi(t_0)\rangle\| < \epsilon$  が成立するような時間  $T > t_0$  が存在する。

証明の概略は次のとおりである。有限系のエネルギー固有値は離散的に分布するので、固有値と固有状態をそれぞれ  $E_n$ 、 $|n\rangle$  とかけば、シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

の解は次のように展開できる。

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |n\rangle$$

よって、

$$\|\Psi(T)\rangle - |\Psi(t_0)\rangle\|^2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - \cos E_n(T - t_0)/\hbar) \quad (7.41)$$

\*4 P. Bocchieri and A. Loinger, Phys. Rev. **107**, 337 (1957)

となる。  $\sum_n |a_n|^2 = 1$  なので、任意の正の実数  $\epsilon$  に対して十分大きな  $N$  をとれば、

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 (1 - \cos E_n(T - t_0)/\hbar) \leq 2 \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 < \epsilon^2/2 \quad (7.42)$$

とすることができる。(7.41)の残りの項の寄与は三角不等式  $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$  を用いると  $|a - b|^2 \leq (|a - c| + |c - b|)^2 \leq 2(|a - c|^2 + |c - b|^2)$  となるので

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 (1 - \cos E_n(T - t_0)/\hbar) = \sum_{n=0}^{N-1} \left| |a_n| - |a_n| e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(T-t_0)} \right|^2 \\ & \leq 2 \sum_{n=0}^{N-1} \left( \left| |a_n| - r_n e^{i\phi_n - \frac{i}{\hbar} E_n(T-t_0)} \right|^2 + \left| r_n e^{i\phi_n - \frac{i}{\hbar} E_n(T-t_0)} - |a_n| e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(T-t_0)} \right|^2 \right) \\ & = 2 \sum_{n=0}^{N-1} \left( \left| |a_n| - r_n e^{i\phi_n - \frac{i}{\hbar} E_n(T-t_0)} \right|^2 + |r_n e^{i\phi_n} - |a_n||^2 \right) \end{aligned} \quad (7.43)$$

ここで、 $r_n$ 、 $\phi_n$  は任意の実数である。(7.43)の右辺が  $\epsilon^2/2$  よりも小さくできることがいえれば、これと(7.42)から  $\|\Psi(T)\rangle - |\Psi(t_0)\rangle\|^2 < \epsilon^2$  が成立して証明が終わるが、これはポアンカレの回帰定理を用いて証明できる<sup>\*5</sup>。  $N$  個の独立な古典的調和振動子を考え、その振幅と位相を  $r_n$ 、 $\phi_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) としよう。その初期状態として、

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| |a_n| - r_n e^{i\phi_n} \right|^2 \leq \epsilon^2/4 \quad (7.44)$$

と選べばポアンカレの回帰定理によりある時刻  $T(> t_0)$  が存在して、その時刻に対して

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| |a_n| - r_n e^{i\phi_n - \frac{i}{\hbar} E_n(T-t_0)} \right|^2 \leq \epsilon^2/4 \quad (7.45)$$

が成立する。(7.44)、(7.45)を(7.43)に代入することで題意は証明される。

崩壊と復活の関連で言うと、光子も原子もエネルギーが離散的であるので、全系のエネルギーも離散的である。従って、上記の証明がそのまま当てはまるので、振動の復活が起こることが理解できる。

## 7.6 量子ゼノン効果

標的めがけて飛んでいる矢を想像しよう。矢が標的に到達するまでには、まず標的までの中間点に到達しなければならない。次に、中間点から標的までの中間点に到達しなければならない。同様な考察を繰り返すと、矢はいつまでたっても標的には到達できないとい

<sup>\*5</sup> L. S. Schulman, Phys. Rev. A **18**, 2379 (1978)

うパラドックスに陥る。これは、古代ギリシャの哲学者ゼノンが指摘したパラドックスでゼノンのパラドックスと呼ばれる。このパラドックスの解決は、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

という無限級数の知識が必要であり、そのような数学が発達する以前は確かにパラドックスであったことが理解できる。

量子論において類似のパラドックスが存在することがミスラとスダルシャンによって指摘された\*6。それは、量子系を連続して観測しつづけるとその系は他の状態に遷移できないというものであり、古典的なゼノンのパラドックスとの類似から**量子ゼノンパラドックス** (quantum Zeno paradox)、または、**量子ゼノン効果** (quantum Zeno effect) と呼ばれる。

量子ゼノン効果の一例として、7.3節で述べたラビ振動を考えよう。はじめ上準位の原子が時間  $t$  の後も原子がなお上準位にある確率は (7.25) より

$$P_{\text{up}}(t) = \cos^2(g\sqrt{n+1}t) \quad (7.46)$$

で与えられる。これから、時間

$$T = \frac{\pi}{2g\sqrt{n+1}} \quad (7.47)$$

の後には、原子は確実に下準位に遷移することがわかる。さて、時間  $T$  を  $N$  等分して  $\Delta t = T/N$  ごとに原子の状態を観測することを考えよう。まず、 $\Delta t$  後に原子が上準位で見出される確率は

$$P_{\text{up}}(\Delta t) = \cos^2(g\sqrt{n+1}\Delta t) = \cos^2\left(\frac{g\sqrt{n+1}T}{N}\right) \quad (7.48)$$

このとき、次の  $\Delta t$  後にも原子が上準位で見出される確率は  $(P_{\text{up}}(\Delta t))^2$  で与えられる。同様に考えて、 $N$  回の観測の間原子がずっと上準位に存在しつづける確率は  $(P_{\text{up}}(\Delta t))^N = (P_{\text{up}}(T/N))^N$  で与えられる。観測をする時間間隔  $\Delta t$  を短くして、観測回数  $N = T/\Delta t$  を大きくする極限をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (P_{\text{up}}(T/N))^N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \cos\left(\frac{g\sqrt{n+1}T}{N}\right) \right]^{2N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{g^2(n+1)T^2}{2N^2} \right]^{2N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{g^2(n+1)T^2}{N}\right) = 1 \end{aligned} \quad (7.49)$$

従って、原子を連続して観測しつづけると、原子は上準位にいとどまり下準位へと遷移しない。この結果は、観測しなければ原子が時間  $t = T$  の後に確実に下準位へ遷移して

\*6 B. Misra and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **18**, 756 (1977); 量子ゼノン効果を実証した実験としては、W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland, Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990)



いること ((7.46)、(7.47) を見よ) と際立った対照をなしている。これが量子ゼノンパラドックスと呼ばれる所以である。この現象の本質は、量子遷移確率の立ち上がり時間が時間に比例せず、時間の自乗に比例することにある ((7.49) の 1 行目の最後の式を見よ)。すなわち、時間  $T/N$  の間に下準位へと遷移する確率は  $(T/N)^2$  に比例するので、 $N$  回の観測回数で遷移する確率の総和は  $(T/N)^2 \times N = T^2/N$  に比例し、これは  $N \rightarrow \infty$  でゼロになる。ゼノンのパラドックスと異なり、量子ゼノン効果は物理的な効果であり、実際に存在する現象である。

## 7.7 複数の原子と光との相互作用

複数の原子がある特定の電磁場モードと相互作用する場合を考えよう。電磁場モードは (5.20) を一般化した

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \left[ \hat{a} \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \hat{a}^\dagger \mathbf{u}^*(\mathbf{r}) \right] \quad (7.50)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  はモード関数とよばれ、その具体的な形は境界条件によって決まる。例えば、体積が  $V = L^3$  で周期的境界条件の場合は電場の偏光方向の単位ベクトルを  $\epsilon$  とすると

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \epsilon e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{k} = \left( \frac{2\pi}{L}l, \frac{2\pi}{L}m, \frac{2\pi}{L}n \right) \quad (7.51)$$

( $l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) で与えられる。また、反射率が 100% の完全な鏡で囲まれた体積が  $V = L^3$  の共振器の場合は、境界面で電場がゼロとならなければならないのでモード関数は

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{8}{\sqrt{V}} \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \quad \mathbf{k} = \left( \frac{\pi}{L}l, \frac{\pi}{L}m, \frac{\pi}{L}n \right) \quad (7.52)$$

( $l, m, n = 1, 2, \dots$ ) で与えられる。

さて、 $N$  個の原子の位置を  $\mathbf{r}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) とし、原子の電気双極子モーメント演算子を  $\hat{\mathbf{d}}_j$  とする。原子と電磁場が電気双極子相互作用 (electric dipole interaction) をする場合、相互作用ハミルトニアンは

$$\hat{V}_{\text{ED}} = - \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{d}}_j \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_j) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \sum_{j=1}^N \left[ \hat{a} \hat{\mathbf{d}}_j \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_j) - \hat{a}^\dagger \hat{\mathbf{d}}_j \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{r}_j) \right] \quad (7.53)$$

と書ける。2 準位原子の完全系は、 $\{|u\rangle, |d\rangle\}$  なので、 $j$  番目の原子の完全性条件 ( $\hat{I}_j$  は  $j$  番目の原子の状態に作用する 2 行 2 列の単位行列)

$$|u\rangle_{jj}\langle u| + |d\rangle_{jj}\langle d| = \hat{I}_j \quad (7.54)$$

を使うと

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}}_j &= \hat{I}_j \hat{\mathbf{d}}_j \hat{I}_j = (|u\rangle_{jj}\langle u| + |d\rangle_{jj}\langle d|) \hat{\mathbf{d}}_j (|u\rangle_{jj}\langle u| + |d\rangle_{jj}\langle d|) \\ &= |u\rangle_{jj}\langle u| \hat{\mathbf{d}}_j |d\rangle_{jj}\langle d| + |d\rangle_{jj}\langle d| \hat{\mathbf{d}}_j |u\rangle_{jj}\langle u| \\ &= {}_j\langle u| \hat{\mathbf{d}}_j |d\rangle_j \hat{\sigma}_{j+} + {}_j\langle d| \hat{\mathbf{d}}_j |u\rangle_j \hat{\sigma}_{j-}\end{aligned}\quad (7.55)$$

が得られる。ここで、 ${}_j\langle u| \hat{\mathbf{d}}_j |u\rangle_j = {}_j\langle d| \hat{\mathbf{d}}_j |d\rangle_j = 0$  を使った。また、 $|u\rangle_{jj}\langle d| = \hat{\sigma}_{j+}$ 、 $|d\rangle_{jj}\langle u| = \hat{\sigma}_{j-}$  はそれぞれ  $j$  番目の原子の昇演算子と降演算子である。

(7.55) を (7.53) へ代入して回転波近似 (すなわち、 $\hat{a}\hat{\sigma}_{j-}$  と  $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{j+}$  を含む項を無視する近似) を行うと

$$\hat{V} = \sum_{j=1}^N (g_j \hat{a} \hat{\sigma}_{j+} + g_j^* \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{j-}) \quad (7.56)$$

が得られる。ここで、

$$g_j = -i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \langle u| \hat{\mathbf{d}}_j |d\rangle \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_j) \quad (7.57)$$

は電気双極子相互作用の行列要素である。

各原子の行列要素  $g_j$  の絶対値が同じ場合は多原子との相互作用の振る舞いを集団的に取り扱うことが可能である。このような近似が当てはまる状況は、原子集団が電磁場の波長に比べて十分狭い領域に局在する場合や、原子が波長間隔ごとに周期的に配列している場合である。このとき、 $g_j = |g_j| e^{i\phi_j} \equiv g e^{i\phi_j}/2$  とおき、**集団的スピン演算子** (collective spin operator)

$$\hat{S}_\pm \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N e^{\pm i\phi_j} \hat{\sigma}_{j\pm}, \quad \hat{S}_z \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_{jz}, \quad (7.58)$$

を定義すると、これらはスピンの交換関係

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_\pm] = \pm \hat{S}_\pm, \quad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hat{S}_z \quad (7.59)$$

を満足することがわかる。このとき、相互作用ハミルトニアン (7.56) は

$$\hat{V} = g(\hat{a}\hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{S}_-) \quad (7.60)$$

となり、全系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{S}_z + \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a}\hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{S}_-) \quad (7.61)$$

で与えられる。スピンの大きさを  $S$ 、その  $z$  成分を  $S_z$  とすると、原子集団の量子状態は  $|S, S_z\rangle$  と書ける。単一モードの電磁場の量子状態をフォック表示で  $|n\rangle$  と書くと、全系の量子状態は各  $S$  の値に対して次のような基底を用いて記述することができる。

$$|S, S_z; n\rangle, \quad (S_z = S, S-1, \dots, -S, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.62)$$

例として、 $N$  個の 2 準位原子が  $n$  個の光子と相互作用する場合を考えよう。原子は初めすべて下準位にあるとすると、原子集団を表すスピンの大きさは  $S = N/2$  であり、初期状態は  $|S, -S\rangle$  で与えられる。スピンの大きさは変わらないので、以下ではその  $z$  成分のみで  $|S_z\rangle$  のように書こう。従って、初期状態は  $| -S, n\rangle$  と書ける。相互作用ハミルトニアンは、 $S_z$  の値を 1 増加 (減少) させると同時に  $n$  の値を 1 減少 (増加) させるので、シュレーディンガー方程式  $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$  の固有状態として、次の形の解を仮定することができる。

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{\min\{2S, n\}} \alpha_k | -S + k; n - k\rangle \quad (7.63)$$

と仮定しよう。これに (7.61) を代入して、一般の大きさのスピンの昇降に伴う関係式

$$\hat{S}_{\pm}|S, S_z\rangle = \sqrt{(S \mp S_z)(S \pm S_z + 1)}|S, S_z \pm 1\rangle \quad (7.64)$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{H}|\Psi\rangle = \sum_k \hbar \left\{ [-\omega(S - k) + \omega_0(n - k)]\alpha_k + g\sqrt{k(n - k + 1)(2S - k + 1)}\alpha_{k-1} \right. \\ \left. + g\sqrt{(k + 1)(n - k)(2S - k)}\alpha_{k+1} \right\} | -S + k; n - k\rangle = E|\Psi\rangle \end{aligned} \quad (7.65)$$

が得られ、これから次のような係数  $\alpha_k$  を決める漸化式が得られる。

$$\begin{aligned} [E + \hbar\omega(S - k) - \hbar\omega_0(n - k)]\alpha_k - \hbar g\sqrt{k(n - k + 1)(2S - k + 1)}\alpha_{k-1} \\ - \hbar g\sqrt{(k + 1)(n - k)(2S - k)}\alpha_{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (7.66)$$

特別な場合として、 $N$  個の原子集団が光子 1 個と相互作用する場合を考えよう。この場合は、 $S = N/2$  であり、(6.8) で  $k = 0, 1$  の場合のみを考えれば十分なので (7.66) から

$$\begin{pmatrix} E + \hbar(\omega N/2 - \omega_0) & -\hbar g\sqrt{N} \\ -\hbar g\sqrt{N} & E + \hbar\omega(N/2 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.67)$$

ゼロでない解  $(\alpha_0, \alpha_1)$  が存在するためには、左辺の行列の行列式がゼロでなければならない。従って、エネルギー固有値は次のように与えられる。

$$E = \frac{1}{2} \left\{ \hbar[-\omega - \omega_0 + N\omega] \pm \hbar\sqrt{4g^2N + (\omega - \omega_0)^2} \right\} \quad (7.68)$$

右辺の  $-\hbar\omega N/2$  は、下準位の原子のエネルギーを  $-\hbar\omega/2$  となるようにエネルギーの原点を取ったことによる。これから、1 個の光子と  $N$  個の下準位にある原子集団が相互作用する場合のラビ分裂は

$$\Delta E = \hbar\sqrt{4g^2N + (\omega - \omega_0)^2} \quad (7.69)$$

で与えられる。特に、光子と原子のエネルギーが共鳴している ( $\omega = \omega_0$ ) 場合は、 $\Delta E = 2\hbar g\sqrt{N}$  となり、分裂幅は原子数の平方根に比例して増大することがわかる。

## 7.8 自然放出のワイスコップーウィグナー理論

これまでの議論では、原子から放出される光子のエネルギーはある値に決まってい揺らがないと仮定された。しかし、現実には原子のエネルギー準位はある幅を持っており、**自然線幅** (natural linewidth) と呼ばれている。その結果、原子から放出される光子もまた同様のエネルギー幅を持っている。自然線幅を与える最も基本的な物理は、原子が相互作用をする電磁場からの反作用である。微小共振器中では、原子と相互作用をする電磁場モードの数が極端に制限されるので自然幅も狭くなり、ジェインズーカミングス模型が良い近似で成立する。ここでは、逆の極限として真空中に置かれた励起原子による光子の放出 — **自然放出** (spontaneous emission) — を考察しよう。

ハミルトニアンは、(7.12) で原子が結合する電磁場のモードが多数存在する場合に拡張した

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{\sigma}_z + \hat{I}) + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \left( g_{\mathbf{k}}\hat{\sigma}_+ \hat{a}_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}}^*\hat{\sigma}_- \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \right) \quad (7.70)$$

を用いる。偏光状態は以下の議論では本質的ではないので無視する。ここで、 $\hat{I}$  は 2 行 2 列の単位行列であり、下準位のエネルギーをゼロとするために導入した。状態ベクトルとしては、

$$|\Psi(t)\rangle = c_0(t)|u, \text{vac}\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t)|d, n_{\mathbf{k}} = 1\rangle \quad (7.71)$$

を仮定する。ここで、 $|u, \text{vac}\rangle$  は原子は上準位で電磁場は真空状態であり、 $|d, n_{\mathbf{k}} = 1\rangle$  は原子は下準位で電磁場は波数  $\mathbf{k}$  のモードに光子が 1 個存在し、他のモードは真空状態であることを表している。初期状態は、 $c_0(0) = 1$ 、 $c_{\mathbf{k}}(0) = 0$  である。(7.71) をシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \quad (7.72)$$

に代入して各状態の係数を等しいとおくと

$$\frac{d}{dt}c_0 = -i\omega c_0 - i \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}} \quad (7.73)$$

$$\frac{d}{dt}c_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}} - ig_{\mathbf{k}}^*c_0 \quad (7.74)$$

が得られる。(7.74) を  $c_{\mathbf{k}}$  について解くと

$$c_{\mathbf{k}}(t) = -ig_{\mathbf{k}}^* \int_0^t dt' c_0(t') e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t'-t)} \quad (7.75)$$

これを (7.73) に代入すると

$$\frac{d}{dt}(c_0(t)e^{i\omega t}) = - \int_0^t dt' (c_0(t')e^{i\omega t'}) \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega)(t'-t)} \quad (7.76)$$

ここで、電磁場の状態密度が  $\rho(\omega_{\mathbf{k}})$  に従って分布していると仮定し、また、 $g_{\mathbf{k}}$  を  $g(\omega_{\mathbf{k}})$  で置き換えて右辺の和を次のように積分形で書く。

$$\sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega)(t' - t)} = \int d\omega_{\mathbf{k}} \rho(\omega_{\mathbf{k}}) |g(\omega_{\mathbf{k}})|^2 e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega)(t' - t)} \simeq \Gamma \delta(t' - t) \quad (7.77)$$

右辺の最後等式では、 $\rho(\omega_{\mathbf{k}}) |g(\omega_{\mathbf{k}})|^2$  が原子の共鳴周波数  $\omega_a$  付近で一定の値をとるものと仮定して

$$\Gamma \equiv 2\pi \rho(\omega_a) |g(\omega_a)|^2 \quad (7.78)$$

とおいた。(7.77) を (7.76) に代入すると

$$\frac{d}{dt}(c_0(t)e^{i\omega t}) = -\Gamma(c_0(t)e^{i\omega t}) \quad (7.79)$$

すなわち、

$$c_0(t) = e^{-i\omega t - \Gamma t} \quad (7.80)$$

こうして、真空中に置かれた励起原子が時間  $t$  の後も励起状態にいつづける確率は  $|c_0(t)|^2 = e^{-2\Gamma t}$  のように減衰率  $\Gamma$  で指数関数的に減衰する。減衰率は (7.78) から明らかかなように原子と相互作用する電磁場モードの密度  $\rho(\omega_a)$  と各モードとの相互作用の強さを特徴づける係数  $|g(\omega_a)|^2$  に比例する。減衰率の逆数は励起準位の**寿命** (lifetime)  $\tau$  と呼ばれる。

$$\tau = \frac{1}{2\Gamma} \quad (7.81)$$

励起状態にある原子は  $\tau$  程度の時間で光子を放出するので、エネルギーと時間の不確定性関係から光子のエネルギーは  $\hbar/\tau = 2\hbar\Gamma$  程度揺らぐ。

自然放出のプロセスが非可逆なのは、真空中の電磁場モードが連続的に分布しているからである。逆に、原子と相互作用できる電磁場モードが一つしかない場合は、 $\rho(\omega_{\mathbf{k}}) = 2\pi\rho_0\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega)$  とおくと

$$\sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega)(t' - t)} = \int d\omega_{\mathbf{k}} \rho(\omega_{\mathbf{k}}) |g(\omega_{\mathbf{k}})|^2 e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega)(t' - t)} = 2\pi\rho_0 |g(\omega)|^2 \equiv \Omega^2 \quad (7.82)$$

これを (7.76) に代入すると

$$c_0(t) = e^{-i\omega t} \cos \Omega t \quad (7.83)$$

となり自然放出は可逆となる。これは 7.3 節で述べたラビ振動に他ならない。

## 7.9 共振器量子電気力学

共振器量子電気力学 (cavity quantum electrodynamics、略して、cavity QED と呼ばれる) は、微小な共振器に閉じ込められた電磁場と原子との相互作用を研究する学問を言う。通常の量子電気力学は、真空中や一様媒質中での原子と電磁場との相互作用を考えるので、電磁場の状態密度は連続的に分布する。これに対して、微小共振器中では、状態密度の離散性が顕著となり、原子と実効的に相互作用をする電磁場モードの数が極端に減少する。その結果、電磁場と相互作用をする原子の諸性質、とりわけ、自然放出寿命が大きく変化する。反射率がきわめて高い鏡で囲まれた微小共振器中では、後述するようにそこに含まれる光子の数を0個または1個と制限することができるために、そのような光子状態と2準位原子を相互作用させると、原子と光子が絡まりあった状態 (entangled state) を作ることができる。これを利用することによって、量子力学の基礎の検証や量子情報に関する研究を行うことができる。

長さが  $L$  の1次元共振器に閉じ込められた電磁場を考えよう。理想的な共振器では、電磁場の振幅が壁のところでゼロにならなければならない。このとき、電磁場の波数  $k$  は

$$\sin kL = 0 \rightarrow k = \frac{\pi}{L}n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.84)$$

のようにとびとびの値しか取れない。従って、原子をこのような共振器に閉じ込めると、原子の共鳴周波数  $\omega$  が条件

$$\omega = ck = \frac{\pi c}{L}n \quad (7.85)$$

を満足しない限り、原子は電磁場と相互作用できず、従って、自然放出も禁止される。この原理を用いて、自然放出を増強あるいは抑圧することができる<sup>\*7</sup>。レーザーを発振させるためにはあるしきい値以上の電流を流す必要があるが、その主要な原因は自然放出によるエネルギーのロスである。自然放出を抑圧することによりレーザーの発振しきい値を下げるができる。

2準位原子と電磁場との相互作用を考える。電磁場は共振器によって離散化されており、原子と実効的に相互作用するモードは1つであると仮定しよう。このとき、原子と電磁場との相互作用はジェインズーカミングス ハミルトニアン

$$\hat{H}_{JC} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \quad (7.86)$$

によって記述されることは既に述べた。超伝導共振器中でのリドベリー原子 (Rydberg atom) の場合の、典型的なパラメーターの値は次の通りである。

- $\omega_0, \omega \sim 10 - 100\text{GHz}$  (リドベリー原子)

<sup>\*7</sup> 超伝導からなるマイクロ波共振器を用いて原子の自然放出を抑圧した実験が次の論文で報告されている。  
R. G. Hulet, E. S. Hilfer, and D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **55**, 2137 (1985)

- $|\delta| \equiv |\omega_0 - \omega| \sim \text{kHz-MHz}$  (離調、detuning)
- $2g \sim 10 - 100\text{kHz}$  (ラビ振動数)

離調がゼロ ( $\delta = 0$ ) の場合、(8.43) からラビ振動数が原子と共振器モードが光子を吸収・放出を繰り返すレートを表していることがわかる。また、真空中でおこる連続モードへの自然放出が非可逆過程であるのに対して、理想的な共振器中で起こるラビ振動は原子と電磁場の間の可逆なエネルギーのやり取りである。

現実の系では、原子が双極子緩和を起こして光子が別なモードに逃げて行ってしまう時間  $t_{\text{dipole}} = 1/\kappa_{\text{dipole}}$  や、共振器の鏡から光子が外へ逃げて行ってしまう時間  $t_{\text{cavity}} = 1/\kappa_{\text{cavity}}$  が存在する。これらの時間が長いほど系は理想的な状況に近い。リドベリー原子の場合、原子の角運動量が最大の状態<sup>\*8</sup> が  $t_{\text{dipole}}$  が最も長く  $10^{-2}$  秒程度になる。 $\kappa_{\text{cavity}}$  は、 $Q$  値 (quality factor) と呼ばれる因子と  $\kappa_{\text{cavity}} = \omega/Q$  なる関係で結ばれている。 $Q$  値は超伝導共振器の場合にはとりわけ高く  $10^8 - 10^{10}$  となる。 $\omega \sim 10^{10} - 10^{11}\text{Hz}$  なので、 $t_{\text{cavity}} = Q/\omega \sim 0.1 - 10^{-3}$  秒となる。従って、 $\kappa_{\text{cavity}} = 10 - 10^3\text{Hz}$  となり、強結合条件

$$g \gg \kappa_{\text{dipole}}, \kappa_{\text{cavity}} \quad (7.87)$$

が成立することがわかる。これは、光子が共振器から出て行くまでに原子と光子が多数回ラビ振動を繰り返すことができることを意味している。

上準位  $|u\rangle$  に励起された 2 準位原子を次々と共振器に注入し、そこを通過した原子の状態を 1 個ずつ測定することにより共振器に光子数状態を作ることができる<sup>\*9</sup>。共振器から出てきた原子の状態が上準位  $|u\rangle$  か下準位  $|d\rangle$  かを測定する。その測定結果によって、共振器内の状態はいろいろな光子数状態へと変化する。

いま、このような操作によって共振器内に光子が  $n$  個存在することがわかっている場合に、新たに上準位にある原子を注入するとどんなことが起こるだろうか。原子が共振器を通過した後の状態は

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(g\sqrt{n+1}t)|u, n\rangle + \sin(g\sqrt{n+1}t)|d, n+1\rangle \quad (7.88)$$

となり (8.45) と同様にラビ振動が起こるが、振動の周波数は  $\sqrt{n+1}$  倍になっている。これは、共振器中の電場振幅がそれだけ大きくなったからである。さて、共振器の光子の

<sup>\*8</sup> これを circular 状態という。circular リドベリー原子とは、1つの電子が非常に高い励起状態 (主量子数  $n \simeq 50$ ) にあり、しかもその角運動量が最大値  $l = m = n - 1$  をとっている原子をいう。そのような電子の波動関数は、半径がおおよそ  $a_B n^2$  であり、 $ea_B n^2/2$  程度の大きな電気双極子モーメントを持っている。 $n = 50$  の状態は  $n = 1$  の状態の 2500 倍もの双極子モーメントを持っており、そのおかげで条件 (7.87) を満足している。角運動量が最大の状態は、電子の軌道が円であるので (軌道が楕円となる) より小さな  $l$  や  $m$  を持つ状態に比べて放射寿命が長い (加速度が小さいから)。 $n = 50$  の場合、寿命は約 30ms である。秒速 300m の熱原子が 30cm 程度の実験系を通過するのに必要な時間は 1ms であるから、双極子緩和が無視できる。

<sup>\*9</sup> D. Meschede, H. Walther, and G. Muller, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 551

損失が無視できる場合は、励起された原子を次々と注入することにより共振器中の光子数は原理的には無限大になりうる。しかし、共振器中の光子数  $n_0$  が条件

$$\sqrt{n_0 + 1}gt = k\pi \quad (k \text{ は整数}) \quad (7.89)$$

を満たせば、(7.88) より  $|\Psi(t)\rangle = (-1)^k |u, n_0\rangle$  となり、光子数はそれ以上増加せず光子数状態  $|n_0\rangle$  が実現する。このような状態は**トラップ状態** (trapping state) と呼ばれる<sup>\*10</sup>。トラップ状態は、共振器を通過する原子の速度（従って、相互作用時間）を調節することにより原理的には実現可能である。しかし、現実には、光子損失や共振器からの黒体輻射、および、原子の検出感度の不完全さを克服する必要がある<sup>\*11</sup>。

<sup>\*10</sup> P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, J. Opt. Soc. Am. **B3** (1986) 906; P. Meystre, G. Rempe, and H. Walther, Opt. Lett. **13** (1988) 1078

<sup>\*11</sup> P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, Phys. Rev. **A34** (1986) 3077; L. Lugiato, M. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. **A36** (1987) 740



## 第 8 章

# 非局所相関、隠れた変数、文脈依存性

### 8.1 物理的実在に関する EPR と Bohr の論争

アインシュタイン、ポドルスキー、ローゼン（以下 EPR と省略）は 1935 年に「物理的実在に関する量子力学的記述は完全か？」(Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?) という論文を発表した<sup>\*1</sup>。この論文の中で、EPR はまず物理学の理論の成功を判断する 2 つの基準を導入した。

- 正しさ (correctness) – これは理論の予言と実験の一致度で測られる。
- 完備性 (completeness) – あらゆる「物理的実在の要素」の対応物が理論の中に含まれていること。

EPR が論文で取り上げたのは 2 番目の点である。ここで、EPR は「物理的実在の要素」(element of physical reality) という概念を導入した。

If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.

いかなる意味でも系を乱すことなく物理量の値を確実に（すなわち確率 1 で）予言することができるならば、この物理量に対応する物理的実在の要素が存在する。

量子力学は状態を記述する波動関数  $\psi$  と観測される物理量を記述する演算子（オブザーバブル） $\hat{A}$  から構成される。いま、 $\psi$  が  $\hat{A}$  の固有値  $a$  に対応する固有関数であるとする。

$$\hat{A}\psi = a\psi \quad (8.1)$$

このとき、波動関数  $\psi$  で記述される状態は物理量  $\hat{A}$  に対応する物理的実在の要素をもつ

---

<sup>\*1</sup> A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935)

といえる。具体例として波動関数

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x} \quad (8.2)$$

と運動量演算子

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (8.3)$$

を考えよう。このとき、

$$\hat{p}\psi(x) = p_0\psi(x) \quad (8.4)$$

が成立する。従って、波動関数 (8.2) で記述される状態  $\psi$  において運動量は物理的実在の要素である。しかし、同じことは位置演算子については言えない。実際、

$$\hat{x}\psi(x) = x\psi(x) \neq x_0\psi(x) \quad (8.5)$$

ここで、 $x\psi(x)$  の  $x$  は変数なので、それを値が決まった固有値  $x_0$  に置き換えることはできない。従って、(8.2) で記述される状態に対しては粒子の位置は物理的実在の要素ではない。実際、 $|\psi(x)|^2$  は  $x$  の値によらず一定値をとるので粒子がどの位置にいるのかは全く不確定である。これは数学的には位置演算子と運動量演算子が互いに交換しないことによる。一般に、2つの物理量に対応する演算子が互いに交換しない場合は、一方を正確に知ると他方は不定になる。

以上のことから、EPR は次の 1 または 2 が成立すると結論づけた。すなわち、

1. 波動関数で記述される実在の量子力学的記述は完備 (complete) ではない。
2. 交換しない演算子に対応する 2つの物理量は同時には実在できない。

量子力学では、波動関数は考えている系に関する完全な情報を与えると仮定されていることを思い出そう (すなわち、量子力学では 2 が成立する)。従って、互いに交換しないオブザーバブルは同時には確定した値をとりえず、EPR の意味で同時には実在できない。しかし、EPR は交換しない 2つの物理量 (具体的には位置と運動量) が同時に物理的実在を持つ例を提示することによって 2 が正しくなく、従って、1 が成立すると主張した。この主張は New York Times でも報道された (図 8.1)。

EPR が考えた状況は次のとおりである。2つの系 I と II を考え、 $t < 0$  における系の状態は既知とする。I と II は時刻  $t = 0$  から  $t = T$  の間だけシュレーディンガー方程式に従って相互作用し、それ以後のある時刻における波動関数  $\Psi(x_1, x_2)$  が得られたものとする。以下ではこの波動関数について考える。系 I のオブザーバブル  $\hat{A}$  の固有値を  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )、対応する固有関数を  $u_n(x_1)$  とする。固有関数系  $\{u_n\}$  は規格直交完全系をなすので、それをを用いて  $\Psi$  を次のように展開することができる。

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \quad (8.6)$$



図 8.1 New York Times (1935 年 5 月 4 日) より転載。

ここで、 $\psi_n$  は展開係数である。今、状態 (8.6) に対して系 I のオブザーバブル  $\hat{A}$  を測定して測定値  $a_k$  が得られたとする。このとき、測定直後の系 I の状態は  $u_k(x_1)$ 、系 II の状態は  $\psi_k(x_2)$  である。測定行為によって量子状態が (8.6) から  $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$  へ不連続に変化する。これが波束の収縮である。波束の収縮に伴う状態変化はユニタリではないことに注意しよう\*2。

次に、 $\hat{A}$  の代わりに別なオブザーバブル  $\hat{B}$  を測定することを考える。 $\hat{B}$  の固有値を  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )、対応する固有関数を  $v_n(x_1)$  とすると  $\Psi(x_1, x_2)$  は次のように展開できる。

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_2)v_n(x_1) \quad (8.7)$$

この状態に対して  $\hat{B}$  を測定して測定値  $b_r$  を得たとすると、測定直後の状態は  $\varphi_r(x_2)v_r(x_1)$  へと不連続に変化する。

このように、系 I に 2 種類の測定を行うことに対応して系 II の状態も対応した 2 つの状態をとる。しかし、仮定により測定時には I と II は物理的な相互作用をしていない。それゆえ、

No real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system. Thus, it is possible to assign two different wave functions (in our example  $\psi_k$  and  $\varphi_r$ ) to the same reality (the second system after the interaction with the first).

\*2 ユニタリ変換は確率を与えるノルムを保存するが、測定直前の状態 (8.6) から直後の状態  $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$  への変化はノルムを保存しない。後者を  $\psi_k(x_2)u_k(x_1)/\|\psi_k(x_2)u_k(x_1)\|$  のように規格化することでノルムを保存するようになることはできるが、非線形変換なのでやはりユニタリではない。

であると EPR は主張した。この主張は系 I と II が相互作用していないので一見もっともらしく思われる。しかし、証明されたわけではないので、正しいかどうか (correctness) は実験で検証する必要がある。

EPR は  $\hat{A}$  として運動量  $\hat{p}$ 、 $\hat{B}$  として位置  $\hat{x}$  を考え、 $\Psi$  として次の波動関数を考えた。

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp = 2\pi\hbar\delta(x_1 - x_2 + x_0) \quad (8.8)$$

ここで、 $x_0$  は定数である。この状態に対して系 I の運動量を測り、測定値  $p$  が得られたとすると測定直後の系 I の状態は

$$u_p(x_1) = e^{\frac{i}{\hbar}px_1} \quad (8.9)$$

であり、系 II の状態は

$$\psi_p(x_2) = e^{-\frac{i}{\hbar}(x_2 - x_0)p} \quad (8.10)$$

である。この状態は、系 II の運動量演算子

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (8.11)$$

の固有値が  $-p$  の固有状態であることがわかる。他方、もし、系 I に対して位置を測定して固有値  $x$  が得られたとすると、測定直後の系 II の状態は

$$\varphi_x(x_2) = 2\pi\hbar\delta(x - x_2 + x_0) \quad (8.12)$$

である。これは (8.8) が

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\hbar\delta(x - x_2 + x_0)\delta(x_1 - x)dx \quad (8.13)$$

と書けることからわかる。(8.12) は系 II の位置演算子  $\hat{Q}$  の固有値  $x + x_0$  の固有関数であることを示している。系 I への測定が系 II に何の影響も与えないとすると、測定直後の系 II の状態は互いに交換しない位置演算子と運動量演算子の同時固有状態となっている。

Thus, by measuring either  $A$  or  $B$  we are in a position to predict with certainty, and without in any way disturbing the second system, either the value of the quantity  $P$  (that is  $p_k = -p$ ) or the value of the quantity  $Q$  (that is  $q_r = x + x_0$ ). In accordance with our criterion of reality, in the first case we must consider the quantity  $P$  as being an element of reality, in the second case the quantity  $Q$  is an element of reality. But, as we have seen, both wave functions belong to the same reality.

つまり、系 II の交換しない 2 つのオブザーバブルが同時に決まった値を持ってしまう。このことから、EPR は波動関数による物理的実在の記述は完全ではないと結論づけた。

これが EPR のパラドックスと呼ばれているものの内容である\*3。

しかし、そもそも系 I の位置と運動量を同時に測定できないので、系 II の位置と運動量が同時に決まっていると結論できないという反論もあり得る。EPR もそのことは意識していて、そのことに対して次のように反論している。

This makes the reality of  $P$  and  $Q$  depend upon the process of measurement carried out on the first system, which does not disturb the second system in any way (もはや両者は相互作用をしていないので影響を及ぼすことができない). No reasonable definition of reality could be expected to permit this.

これに対して、ボーアは全く同じタイトルの論文を発表して、EPR の仕事の批判をした\*4。ボーアは EPR と同様に粒子 1 の測定によって粒子 2 に力学的な擾乱が加わらないことは認めつつも、「系の未来の振る舞いに関して、どのようなタイプの予言が可能かを定める条件に対する (測定の) 影響についての本質的な疑問が存在する」と指摘した。

But even at this stage there is essentially the question of an influence on the very conditions which define the possible types of predictions regarding the future behavior of the system. Since these conditions constitute an inherent element of the description of any phenomenon to which the term “physical reality” can be properly attached, we see that the argumentation of the mentioned authors does not justify their conclusion that quantum-mechanical description is essentially incomplete.

これは、あるタイプの予言と別なタイプの予言は互いに両立しないという「相補性の原理」である。EPR の状況に当てはめると、粒子 1 に対してどんな測定を行うかという選択が、粒子 2 に対する測定結果に関してどんな予言が可能かを決定するというものである。従って、粒子 1 の位置を測定するという状況と運動量を測定するという状況は「相補的」であり互いに両立しない、というのがボーアの主張である。

以上が EPR のパラドックスに関する EPR と Bohr の論争の骨子である。実は、後にアインシュタインが指摘したように、EPR パラドックスの本質は、次の 2 つの可能性の二者択一の問題に帰着する。

- 波動関数を用いた記述は完全である。
- 空間的に離れた 2 つの系の状態は互いに独立である。

\*3 現代的な観点からみると、EPR は次のようなエンタングルした波動関数を議論していることに注意しよう。

$$\Psi = \delta(x_1 - x_2 + x_0)\delta(p_1 + p_2) \quad (8.14)$$

ここで、 $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) なので  $[x_1 - x_2, p_1 + p_2] = 0$  となり、 $x_1 - x_2$  と  $p_1 + p_2$  は同時に確定した値を取りうる。しかし、このことは  $x_1$  と  $p_1$  が同時に確定した値を取りうることは意味しないことに注意しよう (それは量子力学によると不可能である)。

\*4 N. Bohr, Phys. Rev. **48**, 696 (1935)

このうちどちらが正しいか (correctness) は論理だけで結論することはできず、自然に問う (実験で確かめる) 必要がある。アインシュタインは後者を支持した。

On one supposition we should, in my opinion, absolutely hold fast: the real factual situation of the system S2 is independent of what is done with the system S1, which is spatially separated from the former.\*5

どちらが正しいかを実験的に検証可能な形にしたのが次に述べるベルの不等式である。

## 8.2 ベルの不等式

空間的に離れた原子 A と B を考えよう。同時刻では、A と B は相対論的な意味でスペースライクな関係にあるので\*6、一方の原子に対する測定行為は他方の原子に影響を与えないと (一見すると) 思われる。これを、アインシュタインの局所原理 (Einstein's local principle) という。しかしながら、A と B がエンタングルした状態にあると、両者がたとえ空間的にどんなに離れていても一方に対する測定は他方に影響を与える。量子力学が内包するこのような「幽霊のような遠隔作用」(spooky action at a distance, Einstein's letter to Max Born, 1947) を避けるために隠れた変数理論 (hidden variable theories) が考え出された。ところが、ベルは局所理論が満足しなければならない不等式—ベルの不等式 (Bell's inequality)—が存在し、それが量子論の予言と一致しないことを指摘した。\*7

いま  $y$  軸上に離れて存在するスピン 1/2 の原子 A と B を考え、それぞれの原子のスピンを 2 つの異なる方向 (例えば、 $x$  軸と  $z$  軸) で測定し、正の方向を向いていれば +1、負の方向を向いていれば -1 なる測定値を取るものと約束する。そして、原子 A に対する 2 つの異なる方向の測定値を  $Q$ 、 $R$ 、原子 B に対する 2 つの異なる方向の測定値を  $S$ 、 $T$  とする。EPR ペアーごとに原子 A に対しては  $Q$  または  $R$ 、原子 B については  $S$  または  $T$  の測定が行われるので、多数の EPR ペアーの測定から測定値の積  $QS$  や  $QT$  などの期待値を求めることができる。

局所理論によれば、測定値  $Q, R, S, T$  の確率分布は、EPR ペアーが生成される局所的な相互作用とその際に紛れ込むランダムな要素—隠れた変数—によって決まり、離れた場所で行われる観測行為の影響は受けない。このような考え方を局所実在論 (local realism) という。このとき、観測値  $Q, R, S, T$  の確率分布  $P(Q, R, S, T)$  を考えることができる。ベルの不等式では、 $QS + RS + RT - QT$  という量に着目する。この量の期

\*5 A. Einstein, in *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, edited by P. A. Schilpp, Library of Living Philosophers, Evanston (1949), p.85.

\*6 時空の 2 点  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  と  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  は  $s^2 \equiv (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 > 0$  ( $c$  は光速) なる関係にある時、スペースライク (space-like)、 $s^2 < 0$  のときタイムライク (time-like) という。特に、同時刻の場合は空間的に離れた 2 点は常にスペースライクな関係にある。物理的な事象は光速よりも速く伝播できないので、スペースライクな時空点の間で信号のやり取り (通信) を行うことはできない。

\*7 J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964); *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 1987); J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1969)

期待値は確率分布を用いて

$$\langle QS + RS + RT - QT \rangle = \sum_{Q,R,S,T=\pm 1} P(Q, R; S, T)(QS + RS + RT - QT)$$

と書ける。ここで、 $Q, R, S, T$  の取り得るあらゆる組み合わせについて  $QS + RS + RT - QT$  を具体的に計算すると次の表のようになる。

$Q$	$R$	$S$	$T$	$QS + RS + RT - QT$
1	1	1	1	2
1	1	1	-1	2
1	1	-1	1	-2
1	-1	1	1	-2
1	1	-1	-1	-2
1	-1	1	-1	2
1	-1	-1	1	-2
1	-1	-1	-1	2
-1	1	1	1	2
-1	1	1	-1	-2
-1	1	-1	1	2
-1	-1	1	1	-2
-1	1	-1	-1	-2
-1	-1	1	-1	-2
-1	-1	-1	1	2
-1	-1	-1	-1	2

従って

$$QS + RS + RT - QT = \pm 2 \quad (8.15)$$

観測値  $Q, R, S, T$  の確率分布  $P(Q, R; S, T)$  は、確率変数が異なった値を取る事象が互いに独立な背反事象であると仮定すると

$$\sum_{Q,R,S,T=\pm 1} P(Q, R; S, T) = 1 \quad (8.16)$$

を満足しなければならない。従って、不等式

$$-2 \leq \langle QS + RS + RT - QT \rangle \leq 2 \quad (8.17)$$

が成立し、相関関数の絶対値の上限が2で与えられることがわかる。これをベルの不等式という。

次に、(8.17) に現れる相関関数を量子力学で計算してみよう。A 原子のスピン2つの測定軸方向の単位ベクトルを  $\mathbf{q}$ 、 $\mathbf{r}$ 、B 原子の測定軸方向の単位ベクトルを  $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{t}$  とする。対応するスピンの演算子は、パウリ行列を成分とするベクトル  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$  を用いて

$$\hat{Q} = \mathbf{q} \cdot \hat{\sigma}^A, \quad \hat{R} = \mathbf{r} \cdot \hat{\sigma}^A, \quad \hat{S} = \mathbf{s} \cdot \hat{\sigma}^B, \quad \hat{T} = \mathbf{t} \cdot \hat{\sigma}^B \quad (8.18)$$

で与えられる。ここで、上付きの添字 A、B はそれぞれ原子 A、B に対するスピン演算子であることを示している。この時、次の関係式が成立する。

$$(\hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{T} - \hat{Q} \otimes \hat{T})^2 = 4 \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B - 4[(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\sigma}^A] \cdot [(\mathbf{s} \times \mathbf{t}) \cdot \hat{\sigma}^B] \quad (8.19)$$

ここで  $\hat{I}^A$ 、 $\hat{I}^B$  はそれぞれ A、B 原子のスピンに作用する恒等演算子である。(8.19) は次のように示すことができる。左辺を成分ごとに書き下すと

$$\sum_{i,j,k,l} [q_i(s_j - t_j) + r_i(s_j + t_j)][q_k(s_l - t_l) + r_k(s_l + t_l)](\hat{\sigma}_i^A \hat{\sigma}_k^A)(\hat{\sigma}_j^B \hat{\sigma}_l^B) \quad (8.20)$$

ここでパウリ行列の性質

$$\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \delta_{j,k} + i\epsilon_{jkl} \hat{\sigma}_l \quad (8.21)$$

を用いると ( $\epsilon_{jkl}$  は、 $j, k, l$  が 1, 2, 3 およびその偶置換の場合は +1、奇置換の場合は -1、それ以外は 0 をとるエディントン記号である)、

$$(\hat{\sigma}_i^A \hat{\sigma}_k^A)(\hat{\sigma}_j^B \hat{\sigma}_l^B) = \delta_{i,k} \delta_{j,l} + i\delta_{i,k} \epsilon_{jln} \hat{\sigma}_n + i\delta_{j,l} \epsilon_{ikm} \hat{\sigma}_m - \epsilon_{ikm} \hat{\sigma}_m \epsilon_{jln} \hat{\sigma}_n \quad (8.22)$$

を得る。これを (8.20) に代入して計算すると (8.22) の右辺の第一項に対応する項は  $4 \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B$  を与え、第二項、第三項はゼロとなる。第四項を計算すると

$$-4\epsilon_{ikm} q_i r_k \hat{\sigma}_m^A \epsilon_{jln} s_j t_l \hat{\sigma}_n^B = -4[(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\sigma}^A][(\mathbf{s} \times \mathbf{t}) \cdot \hat{\sigma}^B]$$

が得られる。こうして (8.19) が示された。

さて、任意の演算子  $\hat{A}$  に対して  $\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \geq 0$  が成り立つので、

$$|\langle \hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{T} - \hat{Q} \otimes \hat{T} \rangle| \leq 2\sqrt{\langle \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B - [(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\sigma}^A][(\mathbf{s} \times \mathbf{t}) \cdot \hat{\sigma}^B] \rangle} \quad (8.23)$$

ここで、任意の状態に対して

$$\langle \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B \rangle = 1$$

また、パウリ行列の期待値は 1 以下であるから

$$-1 \leq \langle [(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\sigma}^A][(\mathbf{s} \times \mathbf{t}) \cdot \hat{\sigma}^B] \rangle \leq 1 \quad (8.24)$$

これを (8.23) に代入すると

$$|\langle \hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{T} - \hat{Q} \otimes \hat{T} \rangle| \leq 2\sqrt{2} \quad (8.25)$$



が得られる。これをベルの不等式 (8.17) と比較すると相関関数の絶対値の上限が 2 から  $2\sqrt{2}$  へと大きくなっていることがわかる。従って、実験結果が 2 よりも大きくなりベルの不等式が破れていれば、局所的な隠れた変数理論が否定されることになる。実際、実験結果はベルの不等式が破れていることを示しており、\*8 量子力学が予言する非局所相関が実証された。

ベルの不等式の破れが最大になるのは (8.24) の不等式の下限值 (-1) が実現される場合である。これは、 $\mathbf{q}$  と  $\mathbf{r}$  および  $\mathbf{s}$  と  $\mathbf{t}$  がそれぞれ互いに直交している場合である。

具体例として、EPR ペア

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B) \quad (8.26)$$

と

$$\hat{Q} = \hat{\sigma}_z^A, \quad \hat{R} = \hat{\sigma}_x^A, \quad \hat{S} = -\frac{\hat{\sigma}_x^B + \hat{\sigma}_z^B}{\sqrt{2}}, \quad \hat{T} = -\frac{\hat{\sigma}_x^B - \hat{\sigma}_z^B}{\sqrt{2}} \quad (8.27)$$

に対してベルの不等式が最大限に破れている

$$\langle \hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{T} - \hat{Q} \otimes \hat{T} \rangle = 2\sqrt{2} \quad (8.28)$$

ことを示そう。測定結果が  $x$  軸の正の向きの場合に対応する状態を  $|+\rangle$ 、負の向きに対応する状態を  $|-\rangle$  と記そう。これらは、A、B いずれの原子の場合も測定軸を  $z$  軸にとった基底と次の関係で結ばれている。

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \quad (8.29)$$

これらを逆に解いた式

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \quad |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \quad (8.30)$$

(8.26) に代入すると

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle_A |+\rangle_B - |+\rangle_A |-\rangle_B) \quad (8.31)$$

が得られる。状態  $|\uparrow\rangle$ 、 $|\downarrow\rangle$  が  $\hat{\sigma}_z$  の固有値  $\pm 1$  の固有状態であり、また、状態  $|\pm\rangle$  が  $\hat{\sigma}_x$  の固有値  $\pm 1$  の固有状態であることを使うと、(8.26) に対する期待値は

$$\langle \hat{\sigma}_z^A \hat{\sigma}_z^B \rangle = -1$$

(8.31) を使うと

$$\hat{\sigma}_x^B |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle_A |+\rangle_B + |+\rangle_A |-\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B)$$

\*8 A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981); Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982)

となるので

$$\hat{\sigma}_z^A \hat{\sigma}_x^B |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B |\downarrow\rangle_B)$$

が得られる。この状態は  $|\Psi\rangle$  と直交するので

$$\langle \hat{\sigma}_z^A \hat{\sigma}_x^B \rangle = 0$$

よって、

$$\langle \hat{Q}\hat{S} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle \hat{\sigma}_z^A \hat{\sigma}_z^B + \hat{\sigma}_z^A \hat{\sigma}_x^B \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

他の相関関数も同様に計算できる。結果は、

$$\langle \hat{R}\hat{S} \rangle = \langle \hat{R}\hat{T} \rangle = -\langle \hat{Q}\hat{T} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

が得られる。これらを (8.28) の左辺に代入すれば右辺が得られる。(証明終わり)

非局所相関はスペースライクな関係にある 2 点間にも存在し、一方の点での測定結果が他方の点のそれに影響を与える。しかし、これは相対性理論とは矛盾しない。相対性理論が要請していることは、信号が伝播する速さが光速を超えないということであり、スペースライクな時空点の状態の間に量子相関が存在することを否定してはいない。上記の原子の例で言うと、EPR ペアーの一方の原子 A のスピンの状態をある軸に沿って測定すると、その瞬間に他方の原子 B のスピンはその軸方向の固有状態になるが、B の測定者は A の測定者から測定軸に関する情報を (光速以下のスピードでしか) 伝達されない。従って、その情報を知らないと、B の測定者にとって測定結果は全くランダムに見え、それ故に光速を超えた通信をすることはできない。これを示すために、EPR ペアー (8.26) に対する密度演算子

$$\hat{\rho} = |\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B) ({}_A\langle\uparrow| {}_B\langle\downarrow| - {}_A\langle\downarrow| {}_B\langle\uparrow|) \quad (8.32)$$

を考えよう。A の測定に関する情報を知らない B の観測者の還元密度演算子  $\hat{\rho}^B$  は、(8.32) を A についてトレースをとることにより得られる。

$$\hat{\rho}^B = \text{Tr}_A \hat{\rho} = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_{BB}\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_{BB}\langle\downarrow|) = \frac{1}{2} \hat{I} \quad (8.33)$$

これは観測者にとって原子 B のスピンの測定結果が全くランダムであることを示している。

EPR の思考実験を実験的に検証する実験がアスペラによってなされた<sup>\*9</sup>。彼らはカルシウム原子  $^{40}\text{Ca}$  からカスケード的に放出されたスピニングレットの光子対の一方の光子の偏光を測定軸  $\vec{a}$  方向に平行 ( $\parallel$ , + と表記) か垂直 ( $\perp$ , - と表記) を測定した。図 8.2 で左 (右) 側に進む光子については測定軸を  $\vec{a}$  ( $\vec{b}$ ) に平行か垂直を測定し、平行な場合

<sup>\*9</sup> A. Aspect, et al., Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982)

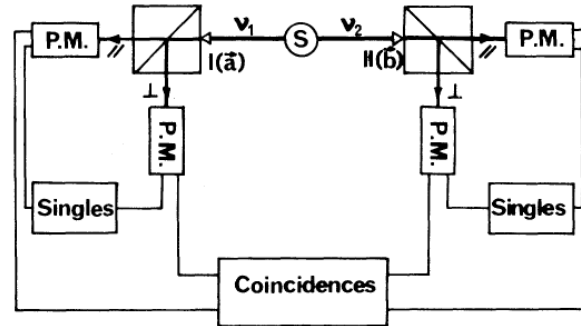


図 8.2 アスペラによるベルの不等式の破れの実験. カルシウム原子  $^{40}\text{Ca}$  からカスケード的に放出されたスピニングレットの光子対の一方の光子のスピンを測定軸  $\vec{a}$  方向に平行 ( $\parallel$ ) か垂直 ( $\perp$ ) を測定し、他方の光子のスピンを測定軸  $\vec{b}$  に平行か垂直かを測定する。そして、平行な場合は測定値 +1、垂直な場合は測定値-1 を与える。例えば、左側で +1、右側で-1 が同時計測される確率は  $P_{+-}(\vec{a}, \vec{b})$  である。

は +1、垂直な場合は-1 を測定値として与えた。このような測定を多数回繰り返して平均をとることで、左側と右側でそれぞれ偏光方向  $\alpha = \pm$ 、 $\beta = \pm$  が観測される同時確率分布  $P_{\pm\pm}$  を求めた。これからベルの不等式の議論で測定方向が  $\vec{a}, \vec{b}$  に対応する量が求まる。具体的には、(8.18) で  $\mathbf{q} = \vec{a}$ 、 $\mathbf{r} = \vec{b}$  と置いた時の期待値  $\langle \hat{Q} \otimes \hat{S} \rangle$  は

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) \quad (8.34)$$

で与えられる。この量を用いると (8.28) の左辺に対応する量は

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}') \quad (8.35)$$

で与えられる。局所実在論に基づくベルの議論では  $-2 \leq S \leq 2$  であるが、量子論の上限は  $2\sqrt{2}$  になる。測定で得られた実験結果は  $S = 2.697 \pm 0.015$  であり、量子力学の予言の上限値に近い値である。

### 8.3 グリーンバーガー・ホーン・ツァイリンガー (GHZ) 状態

ベルの不等式の破れを実証するためには、多数回測定して期待値を計算する必要がある。しかし、3 粒子のスピンの最大限エンタングルした状態—グリーンバーガー・ホーン・ツァイリンガー (Greenberger-Horne-Zeilinger) 状態<sup>\*10</sup>—を用いることで、1 回の測

<sup>\*10</sup> D. M. Greenberger, M. Hone and A. Zeilinger, in *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, M. Kafatos, ed. (Kluwer, 1989) p.69; D. M. Greenberger, M. A.

定で物理的実在の要素を確実に否定することができる。3 個のスピン 1/2 粒子の波動関数として

$$\psi = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)(u_1 u_2 u_3 - v_1 v_2 v_3) \quad (8.36)$$

を考える。ここで空間部分の波動関数  $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  は 3 粒子が互いに十分に離れていることを保証するものとする。スピン波動関数  $u = (1, 0)^T$ ,  $v = (0, 1)^T$  は次の性質を満足する。

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x u &= v, \quad \hat{\sigma}_y u = iv, \quad \hat{\sigma}_z u = u \\ \hat{\sigma}_x v &= u, \quad \hat{\sigma}_y v = -iu, \quad \hat{\sigma}_z v = -v \end{aligned} \quad (8.37)$$

波動関数 (8.36) は次のような複数の演算子の固有状態である。

$$\hat{\sigma}_{1x} \hat{\sigma}_{2y} \hat{\sigma}_{3y} \psi = \hat{\sigma}_{1y} \hat{\sigma}_{2x} \hat{\sigma}_{3y} \psi = \hat{\sigma}_{1y} \hat{\sigma}_{2y} \hat{\sigma}_{3x} \psi = \psi \quad (8.38)$$

$$\hat{\sigma}_{1x} \hat{\sigma}_{2x} \hat{\sigma}_{3x} \psi = -\psi \quad (8.39)$$

上記の 4 つの演算子は互いに交換し、更に、

$$(\hat{\sigma}_{1x} \hat{\sigma}_{2y} \hat{\sigma}_{3y})(\hat{\sigma}_{1y} \hat{\sigma}_{2x} \hat{\sigma}_{3y})(\hat{\sigma}_{1y} \hat{\sigma}_{2y} \hat{\sigma}_{3x}) = -\hat{\sigma}_{1x} \hat{\sigma}_{2x} \hat{\sigma}_{3x} \quad (8.40)$$

が成立する。EPR の議論によると 3 つの粒子は互いに十分離れているので、ある粒子のスピンを測定しても別な粒子に影響は及ぼさない。 $\hat{\sigma}_{1x}$  の測定値を  $m_{1x}$  などと書くと、(8.39)、(8.40) から

$$m_{1x} m_{2y} m_{3y} = m_{1y} m_{2x} m_{3y} = m_{1y} m_{2y} m_{3x} = 1 \quad (8.41)$$

$$m_{1x} m_{2x} m_{3x} = -1 \quad (8.42)$$

しかし、(8.41) の全ての項を掛け合わせて  $m_{1y}^2 = m_{2y}^2 = m_{3y}^2 = 1$  を用いると  $m_{1x} m_{2x} m_{3x} = 1$  が得られるが、これは (8.42) と矛盾する。

以上の議論では、(8.41) の  $m_{1x}$  が (8.42) の  $m_{1x}$  と同じ値を持つと仮定されている。しかし、(8.41) の最初の項を測るためには  $\hat{\sigma}_{2y}, \hat{\sigma}_{3y}$  も測る必要があり、(8.42) の場合には  $\hat{\sigma}_{2x}, \hat{\sigma}_{3x}$  を測る必要がある。ところが、これらは互いに背反的であり実際に実験することはできない。

こうして、状態 (8.36) に対して、物理量  $\hat{\sigma}_{1x} \hat{\sigma}_{2x} \hat{\sigma}_{3x}$  を測定すると、実在の要素が存在すると測定値は必ず 1 になるが、量子論の予言は常に -1 である。このような違いが現れた理由は、c-数が互いに交換するのに対して、パウリスピン演算子は反交換するからである。

## 8.4 非局所相関の実験

図 8.3 (a) のように原子源から出射される 2 準位原子にレーザー光を照射して上準位へ励起し、それを真空状態にある共振器を通過させる実験を考える。初期状態が原子が上準

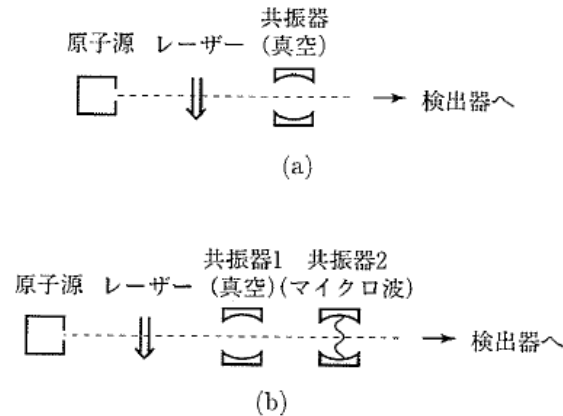


図 8.3 非局所相関の実験. (a) 原子源から出射された 2 準位原子はレーザー光により上準位へ励起された後、真空の共振器を通過し、そこで共鳴した電磁場モードと相互作用をする。共振器から出てきた原子の状態は、検出器で測定される。  
(b) 共振器 1 と原子の検出器の間に別の共振器 2 を置き、原子がそこを通過する際にマイクロ波を照射してラビ振動を起こさせる。

位で光子数がゼロの場合の時間発展は (7.24) で  $n = 0$  の場合に相当するので

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}(\cos gt|u, 0\rangle - i \sin gt|d, 1\rangle) \quad (8.43)$$

で与えられる。ここで、 $t$  は共振器の通過時間である。共振器を通過後は、原子と共振器に残された光子は空間的には分離され、原子の状態は共振器から離れた検出器によって測定される。

注目すべき点は、原子の状態が測定されるまでは、原子と光子はたとえ空間的に離れていても (8.43) の重ね合わせの状態にあることである。全系のエネルギーは保存するので、原子が上準位にあれば共振器中の光子数はゼロであり  $|u, 0\rangle$ 、原子が下準位にあれば共振器中には光子が 1 個存在する  $|d, 1\rangle$ 。この相関はエネルギー保存則の反映であり古典論でも存在する。量子論に特有な点は、測定が行われるまでは全系の状態が重ね合わせの状態にあり、光子の状態は空間的に離れた原子の状態を測定した瞬間に確定することである。このような非局所的相関は、それを最初に指摘した人々の名前にちなんで**アインシュタイン-ポドルスキー-ローゼン相関** (Einstein-Podolsky-Rosen correlation)、略して、**EPR 相関** (EPR correlation) とも呼ばれる<sup>\*11</sup>。

しかし、次のような反論が想定される。すなわち、原子と光子の状態はそれらが相互作用を終えた時点、すなわち、原子が共振器を出た時点で確定しているのだが、ただ、何らかの理由で確率的要素が加わってしまっているために測定結果がランダムに変化する

<sup>\*11</sup> A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47** (1935) 777

だけである。このような仮定に基づく理論を局所的な隠れた変数理論と呼ぶ。

非局所性を予言する量子論と、相関の起源が局所的であるとみなす局所的隠れた変数理論<sup>\*12</sup>のどちらが正しいかを調べるために、図 8.2(b) のように共振器 1 と原子の検出器の間に別の共振器 2 を置き、原子がそこを通過する際にマイクロ波を照射してラビ振動を起こさせる。その結果、原子の状態  $|u\rangle$ 、 $|d\rangle$  はそれぞれ上準位と下準位の重ね合わせの状態へと時間発展する。

$$|u\rangle \rightarrow \cos\theta|u\rangle - \sin\theta|d\rangle, \quad |d\rangle \rightarrow \sin\theta|u\rangle + \cos\theta|d\rangle \quad (8.44)$$

ここで、 $\theta$  はマイクロ波の強さや相互作用時間に依存する定数である。この変換は、一般的にはユニタリ行列であるが、議論を簡単にするために実直交行列に選んでいる。(8.44) を (8.43) に代入すると (共通の因子  $e^{-i\omega t/2}$  は省略する)

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \cos gt|u, 0\rangle - i \sin gt|d, 1\rangle \\ &\rightarrow \cos gt(\cos\theta|u\rangle - \sin\theta|d\rangle)|0\rangle - i \sin gt(\sin\theta|u\rangle + \cos\theta|d\rangle)|1\rangle \\ &= (\cos gt \cos\theta|0\rangle - i \sin gt \sin\theta|1\rangle)|u\rangle + (-\cos gt \sin\theta|0\rangle - i \sin gt \cos\theta|1\rangle)|d\rangle \end{aligned} \quad (8.45)$$

が得られる。この場合、原子の状態を測定して原子が例えば上準位  $|u\rangle$  にあると観測されると、共振器に残された光子の状態はそれに対して直接には何の操作も行っていないにもかかわらず、マイクロ波を照射する前の状態  $|0\rangle$  から  $\cos gt \cos\theta|0\rangle - i \sin gt \sin\theta|1\rangle$  へと変化する。

このように、二つの系の間にひとたび量子エンタングルメントが形成されると、一方の状態を操作することによって空間的にはなれたもう一方の状態を変化させることができる。これが、EPR のパラドックスの本質である。また、原子と光子の相互作用が終了した後にはマイクロ波を照射するかしないかを選択でき、それによって共振器中の光子の状態としてフォック状態  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$  かそれらの重ね合わせの状態にすることができる。これを遅延選択 (delayed choice) と呼ぶ。

以上の結果は、我々の直感と鋭く対立するが、実験によって正しいことが確かめられている。従って、局所的な隠れた変数理論は否定され、量子論の予言する非局所相関が実験で確かめられた。遅延選択の実験は、「測定が行われるまでは実在と言うものを考えてはいけなく、確率振幅という情報のみが存在する」と主張するコペンハーゲン解釈の正しさを示している。実験結果の奇妙さ、不思議さを解きほぐしてくれる明快な説明を我々はいまだ持たないが、現在では、それらの結果を正しいものとして受け入れるだけでなく、量子情報処理の分野に応用しようという段階に研究が進んでいる<sup>\*13</sup>。

<sup>\*12</sup> これに対して、D. Bohm は相関の起源の非局所性を見とめる非局所的な隠れた変数理論を提案した。D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952); **85**, 180 (1952). この理論は、量子力学と同じ観測結果を予言し、従って、実験結果と矛盾しない。

<sup>\*13</sup> 現在では、これら非局所相関は数十キロ離れてなお存在することが実験的に確かめられている。例えば、W. Tittel, J. Brendel, B. Gisin, T. Herzog, H. Zbinden, and N. Gisin, Phys. Rev. A **57** (1998) 3230

## 8.5 ベル-コッヘン-スペッカー定理

ベル-コッヘン-スペッカー定理は John S. Bell (1966)<sup>\*14</sup>と Simon B. Kochen & Ernst Specker (1967)<sup>\*15</sup>により独立に証明された、隠れた変数理論の可能なタイプを制約する no-go theorem である。ベルの不等式の破れが、隠れた変数理論が非局所的でなければならないことを主張するのに対して、ベル-コッヘン-スペッカー定理はヒルベルト空間が3次元以上の場合、文脈依存性 (contextuality) が不可避であることを主張する。2次元の場合は、Kochen と Specker は2次元キュービットについて文脈依存のない (noncontextual) 隠れた変数モデルを陽に構成した。

ベル-コッヘン-スペッカー (Bell-Kochen-Specker) の定理は隠れた変数理論にとって文脈依存が避けられないことを示している。量子力学における文脈依存性 (quantum contextuality) とは、オブザーバブルが満足すべき代数的関係式を満足しつつ、全ての物理量に決まった値を割り振ることが不可能であることを主張している。従って、古典論のように全ての物理量の測定値が測定する前から存在していると仮定することができない。具体的には、可換なオブザーバブルを同時測定した時の測定結果が相互に依存してしまい独立ではないという結果に導く。それ故、文脈依存性のない隠れた変数理論は量子力学の予言を再現できない。非局所性は文脈依存性の特別な場合であるとも解釈できる (Fine's theorem)<sup>\*16</sup>。

具体例としてヒルベルト空間の次元が3次元のスピンが1の系 ( $S_x, S_y, S_z$ ) を考えよう。

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S(S+1) = 2 \quad (8.46)$$

スピン1の場合は  $S_x^2, S_y^2, S_z^2$  は互いに可換である。それゆえ、これらは同時測定可能であり、測定値は0または1である。また、これらの和は (8.46) を満足しなければならないので、3つの測定値のうち2つは1、残りは0でなければならない。コッヘンとスペッカーはうまく117個の方向を選ぶと矛盾する、すなわち、(8.46) と整合する色分けができない、ことを示した。

スピンのある軸への射影の2乗 ( $S_x^2, S_y^2, S_z^2$  など) が値1(0)をとる方向を赤(青)で色付けしよう。拘束条件 (8.46) を満足するためには赤が2個、青が1個となるような色分けが必要であるが、それができない3つの軸の組が存在すれば隠れた変数理論は不可能となる。もし異なった色を持つ2つのベクトルのなす角度が  $\tan^{-1}(0.5) = 26.565$  度未満の場合は第3のベクトルが存在して条件 (8.46) を破ることができる。

以下の議論では  $z$  軸を青色 (0) と取り、赤色 (1) のベクトルが  $\mathbf{a} = \mathbf{z} + \alpha \mathbf{y}$  ( $0 < \alpha < 0.5$ ) 方向の軸にとれたとする。

<sup>\*14</sup> J. S. Bell, Rev. Mod. Phys. **38**, 447 (1966)

<sup>\*15</sup> S. Kochen and E. P. Specker, Journal of Mathematics and Mechanics **17**, 59 (1967)

<sup>\*16</sup> Arthur Fine, Phys. Rev. Lett. **48**, 291 (1982)

1.  $\mathbf{z}$  は青なので、 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  は赤でなければならない。
2.  $\mathbf{c} = \beta\mathbf{x} + \mathbf{y}$  は任意の  $\beta$  に対して赤である。
3.  $\mathbf{a} = \mathbf{z} + \alpha\mathbf{y}$  と  $\mathbf{x}$  は赤なので、 $\mathbf{d} := \mathbf{x}/\beta - \mathbf{a}/\alpha$  は赤である。[ここで、直交する赤色の軸  $\mathbf{k}, \mathbf{l}$  があったとすると、 $\mathbf{k} \times \mathbf{l}$  は青なので、それと直交する  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{l}$  の線形結合で作られる軸は赤となることに注意しよう。]
4.  $\mathbf{d}$  は  $\mathbf{c}$  と直交： $\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = 0$ 。
5.  $\mathbf{c}$  と  $\mathbf{d}$  は赤なので  $\mathbf{e} := \mathbf{c} + \mathbf{d} = (\beta + \beta^{-1})\mathbf{x} - \mathbf{z}/\alpha$  は赤。
6.  $1/\alpha > 2$  であり、 $|\beta + \beta^{-1}|$  は 2 から無限大までの値をとるので、与えられた  $\alpha$  に対して  $\beta$  の値を適当にとれば  $\mathbf{e}$  は  $\mathbf{f} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$  あるいは  $\mathbf{g} = -\mathbf{x} - \mathbf{z}$  と平行にすることができる。
7.  $\mathbf{e}$  は赤なので  $\mathbf{f}$  も  $\mathbf{g}$  も赤。
8.  $\mathbf{f}$  は  $\mathbf{g}$  と直交しているので両者に直交するベクトル、すなわち、 $\mathbf{y}$  は青で矛盾。更に、 $\mathbf{z} = -(\mathbf{f} + \mathbf{g})/2$  も赤となり矛盾。
9. それゆえ、 $\mathbf{z}$  と  $\mathbf{a}$  が異なった色を持つと仮定すると矛盾してします。

$22.5 < \tan^{-1}(0.5) = 26.565$  なので  $z$  軸から  $22.5$  度傾いた軸は  $z$  軸と異なった色になれないので青、更にそこから  $22.5$  度傾いた軸も青、これをあと 2 回行くと、 $y$  軸も  $x$  軸も青となり矛盾する。従って、 $22.5$  度傾いた軸は色付けできない方向と結論できる。逆に、異なった色を配置できるためには 2 つの軸のなす角度は  $\tan^{-1}(0.5)$  よりも大きくなければならない。このようにしてうまく 117 個の方向を考えると全てに無矛盾な色付けができないことをコッヘンスペッカーは示した。

以上の議論からわかるように、ベルーコッヘンスペッカーの定理は幾何学的な定理であり、ベルの不等式と同様に量子論とは独立である。それゆえ、量子論とは別な理論的枠組である隠れた変数理論に制約を与えることができる。8.3 節で議論した GHZ を使った物理的実在の要素の否定の議論も量子論における文脈依存性の一例であるといえる。

## 8.6 レゲットーガーグの不等式

量子力学では観測するまでは実在というものを考えてはならず、確率振幅という情報のみが存在する。これは、物理量が測定するまでは確定値を持っていないということを意味している。これに対して、日常世界では、巨視的物体の観測量は、我々が観測する、しないに関わらず各瞬間ごとに決まった値を持っていると多くの人は信じている。これを**巨視的実在論** (macrorealism) という。

ミクロな世界は量子力学に従っているにもかかわらず、巨視的物体が重ね合わせの状態にあることを見た人は誰もいない。このような我々にとって確かだと思われる日常の経験事実を目の当たりにすると、原子の世界を記述する力学として誕生した量子力学が、果たしてどこまで巨視的な領域へ外挿できるのかという根本的な疑問をいだかせる。

残念ながら、このような根本的な疑問は多くの場合、明快な答えを持たない。その理由



は、答えを見出せないというよりもむしろ、もっともらしい「答え」がありすぎてどれが真相かを見極めがつかないからである。その代表例が環境との相互作用によるデコヒーレンスである。これによると、巨視系は必然的に環境と相互作用せざるを得ず、その結果、重ね合わせの状態がマイクロな時間スケールで壊れてしまうというものである。

おそらく、より真相をついている答えは、巨視的物体は実際に量子力学的な重ね合わせの状態にあり得るが、それを観測するために適したオブザーバブルを我々は持たないということであろう。具体的に、 $N$  粒子系の互いに直交する状態  $\Psi_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  ( $i = 1, 2$ ) を考えよう。これらの状態間の干渉効果を観測するためには、あるオブザーバブル  $\hat{O}$  が存在して、それに対する行列要素が有限でなければならない。

$$\int \Psi_1^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \hat{O} \Psi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N \neq 0 \quad (8.47)$$

ところが、相互作用をしている多粒子系では、 $N$  粒子全体がもつれた状態 (entangled state) にあるためにそのようなオブザーバブルを構成することは至難である。

おそらく最も厄介な疑問は、そのような干渉効果が観測されたとして、それが量子力学によって記述されるだけではなく、巨視的実在論によっても記述されるのではないかというものである。そこで、ある現象が後者ではなく前者によってのみ説明可能であることの基準はなにかという問題が生じる。それに対する一つの答えが**レゲットーガーグの不等式** (Leggett–Garg inequality) である<sup>\*17</sup>。この不等式は次に挙げる三つの前提の上に成立する。

- 巨視的実在論 (macrorealism)：巨視系が、巨視的に区別できる 2 個以上の状態をとりうる場合、観測するしないにかかわらず系は各瞬間ごとにどれか 1 つの状態にある。
- 帰納性 (induction)：ある時刻におけるアンサンブルの性質は、その時刻以前の条件には依存するがその時刻における測定には依らない。この仮定が成立すると、観測結果が被測定系の性質そのものであるとみなすことが可能になる。
- 非破壊測定が可能であること (noninvasive measurability)：これは次のことを意味している。時刻  $t = 0$  で系が状態  $A(B)$  に見出される確率を  $p_A(p_B)$  とする。さらに、時刻  $t > 0$  で 2 回目の測定を行った場合に系が状態  $C$  に見出される条件付確率を  $P(C|A)$  ( $P(C|B)$ ) と書こう。他方、時刻  $t = 0$  で測定を行わなかった場合に、時刻  $t$  で系が状態  $C$  に見出される確率  $P(C)$  は次のように与えられる。 $P(C) = P(C|A)p_A + P(C|B)p_B$  すなわち、測定行為は統計性に影響を与えない。

議論を簡単にするため、巨視的物体がとりうる状態が 2 つしかなく、これらに対応して観測量  $Q$  のとりうる値が  $+1$  または  $-1$  であるとしよう。時刻  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  において  $Q$  を観測した測定値を  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  とし、これらの値が得られる確率密度を  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  としよう。このとき、時刻  $t_1, t_2$  における測定値の相関関数は次のよ

<sup>\*17</sup> A. J. Leggett and A. Garg, Phys. Rev. Lett. **54**, 857 (1985)

うに定義される。

$$K_{12} = \langle Q_1 Q_2 \rangle \equiv \sum_{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 = \pm 1} Q_1 Q_2 \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \quad (8.48)$$

他の相関関数  $K_{13}, K_{14}, K_{23}, K_{24}$  も同様に定義される。このとき、次の不等式が成立する。

$$1 + K_{12} + K_{23} + K_{13} \geq 0 \quad (8.49)$$

$$|K_{12} + K_{23} + K_{34} - K_{14}| \leq 2 \quad (8.50)$$

これらをレグットーガークの不等式という。

証明は次のようにしてなされる。 $Q_i^2 = 1$  に着目すると

$$|Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3| = |(Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3) Q_2 Q_3| = Q_1 Q_2 + 1$$

よって、

$$-(Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3) \leq Q_1 Q_2 + 1$$

両辺に  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  を掛けて平均すれば (8.49) が得られる。同様にして、

$$|Q_1 Q_2 + Q_2 Q_3| = |(Q_1 Q_2 + Q_2 Q_3) Q_2 Q_3| = |Q_1 Q_3 + 1| = 1 + Q_1 Q_3$$

$$|Q_1 Q_4 - Q_3 Q_4| = |(Q_1 Q_4 - Q_3 Q_4) Q_3 Q_4| = |Q_1 Q_3 - 1| = 1 - Q_1 Q_3$$

よって

$$|Q_1 Q_2 + Q_2 Q_3 - (Q_1 Q_4 - Q_3 Q_4)| \leq 2$$

両辺に  $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  を掛けて平均すれば (8.50) が得られる。

さて、系が 2 つの状態を取り、それらの間をコヒーレントにラビ振動する場合を考えよう。このとき、相関関数は

$$K_{ij} = \cos \Omega(t_i - t_j) \quad (8.51)$$

で与えられる。時間間隔を  $t_{i+1} - t_i = 3\pi/(4\Omega)$  と選べば (8.49) の左辺は  $1 - \sqrt{2}$  となり不等式は破れる。また、 $t_{i+1} - t_i = \pi/(4\Omega)$  と選べば (8.50) の左辺は  $2\sqrt{2}$  となりやはり不等式は破れる。

超伝導リングを用いてレグットーガークの不等式が実験的に検証できるという提案がテシェによりなされ<sup>\*18</sup>、理論と実験の両面から現在に至るまで活発な研究がなされている。

<sup>\*18</sup> C. D. Tesche, Phys. Rev. Lett. **64**, 2358 (1990)

## 8.7 クローン禁止定理

空間的に離れた EPR ペアーの一方の状態を測定すると他方の状態が一瞬で確定するという性質を使うと、光速度よりも速く情報の伝達ができるのではないかという疑問が湧く。これは、量子論と相対論とが論理的に無矛盾であるかどうかを考えさせられる興味深い問題である。

未知の状態  $|\psi\rangle$  にある量子が 1 個与えられたとしよう。 $|\psi\rangle$  を知ろうとしてその位置  $x$  を測定すると、その直後の運動量は全く不確定になってしまい測定前の量子状態は破壊される。運動量  $p$  を測定しても同様である。従って、量子が 1 個だけ与えられてもその量子状態を知ることが不可能である。ところが、もしこの状態を複製（クローン）することができればどうだろうか。これが可能ならば、同一の状態  $|\psi\rangle$  で記述される系を多数複製し、量子トモグラフィにより  $|\psi\rangle$  を知ることができる。

未知の状態をクローンできれば光速よりも速い通信が可能となる。いま、スピン一重項状態にある EPR ペアーを規則的に発生し、その一方をアリスへ他方をボブへ送る状況を考えよう。アリスは、飛んでくる粒子のスピンを  $z$  軸に沿って測定するか全く測定しないという 2 通りの状況を想定し、測定する場合は二進法の 1、測定しない場合が 0 を意味するものとボブとあらかじめ約束しておく。ボブのところに飛んでいく粒子のスピンは、アリスが測定すれば  $z$  成分の固有状態になっており、測定しなければ固有状態にはなっていない。ボブの所に飛んできたたった一つの粒子の量子状態を知ることが上に述べたようにできない。しかし、もし、未知の量子状態をクローンすることができれば、ボブは飛んできた粒子の量子状態を複製して  $z$  軸に沿って多数回測定することにより、それが  $z$  成分の固有状態になっているかいないかを知ることができる（固有状態であれば、測定結果はすべて同じであり、固有状態になっていなければ上向きと下向きがランダムに現れる）。こうしてボブはアリスが測定したか測定しなかったかを知ることができ、上記の約束に従ってアリスからボブへ 0、1 の情報を光速よりも速く送ることができる。

実は、未知の量子状態を複製することを禁止する**クローン禁止定理** (no cloning theorem) が存在する<sup>\*19</sup>。

この定理を背理法で証明しよう。未知の量子状態を複製することが可能ならば、与えられた二つの異なった状態  $|\psi_1\rangle$ 、 $|\psi_2\rangle$  と複製が作られる系の初期状態  $|\phi_i\rangle$  に対して、

$$\hat{C}|\psi_1\rangle|\phi_i\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_1\rangle, \quad \hat{C}|\psi_2\rangle|\phi_i\rangle = |\psi_2\rangle|\psi_2\rangle \quad (8.52)$$

を満足する演算子  $\hat{C}$  が存在する。量子力学の線形性より複素数  $a$ 、 $b$  に対して

$$\hat{C}(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle)|\phi_i\rangle = a|\psi_1\rangle|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle \quad (8.53)$$

<sup>\*19</sup> W. K. Wootters and W. H. Zurek, Nature (London) **299**, 802 (1982); D. Dieks, Phys. Lett. A **92**, 271 (1982); H. P. Yuen, Phys. Lett. A **113**, 405 (1986); G. M. D'Ariano and H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. **76**, 2832 (1996)

が成立する。しかし、 $\hat{C}$  は重ね合わせの状態  $a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$  も複製するので

$$\hat{C}(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle)|\phi_i\rangle = (a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle)(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) \quad (8.54)$$

となり (8.53) と矛盾する。従って、未知の量子状態をクローンすることはできない。

クローン禁止定理は、量子力学の時間発展がユニタリーであることを利用して証明することもできる。直交する状態は CNOT ゲートによりクローンできるので、異なっているが直交はしない二つの状態  $|\psi_1\rangle$ 、 $|\psi_2\rangle$  を考えよう ( $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| \neq 1$ 、 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle \neq 0$ )。クローンマシンも量子力学に従って時間発展するので、その作用を記述する演算子  $\hat{C}$  はユニタリー演算子である。議論をより一般的にするためにクローン操作の前後における環境の状態変化  $|E\rangle \rightarrow |E'\rangle$  も考慮すると、一般にクローン操作は

$$\hat{C}|\psi_1\rangle|\phi_i\rangle|E\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_1\rangle|E'\rangle, \quad \hat{C}|\psi_2\rangle|\phi_i\rangle|E\rangle = |\psi_2\rangle|\psi_2\rangle|E''\rangle \quad (8.55)$$

と書ける。これらの式の内積をとると

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = (\langle\psi_1|\psi_2\rangle)^2 \langle E'|E''\rangle \quad (8.56)$$

が得られるが、これが満足されるのは  $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$  の値が 0 または 1 の場合に限られる。しかし、これは最初に述べた仮定と矛盾する。この証明から任意の状態が複製できないことはもちろん、対象を直交しない 2 つの状態に限定しても複製できないことがわかる。

このように未知の量子状態を複製することは、重ね合わせの原理や時間発展のユニタリー性という量子論の基本原則と矛盾するために不可能である。非局所相関は非相対論的な量子論の枠内でも現れる概念なので、それが相対論と無矛盾かどうかは自明ではない。無矛盾性を保証するクローン禁止原理が重ねあわせの原理や時間発展のユニタリー性という量子論の基本的な性質を使って証明されることは、物理学の様々な原理（光速不変の原理、重ねあわせの原理、ユニタリー時間発展等）の内的関連を示唆しているようで興味深い。

# 索引

- アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼンのパラ  
ドックス Einstein, Podolsky and  
Rosen's paradox, [101](#)
- グリーソンの定理 Gleason's theorem, [32](#)
- 系 corollary, [32](#)
- 正作用素値測度 positive operator valued  
measure, [32](#)
- 波束の収縮 reduction of the wave packet, [99](#)
- Bell-Kochen-Specker の定理  
Bell-Kochen-Specker theorem, [32](#)