

アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼン相関に対する相対論的効果

寺嶋 容明

〈東京工業大学大学院理工学研究科 152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 e-mail: terasima@stat.phys.titech.ac.jp〉

上田 正仁

〈東京工業大学大学院理工学研究科 152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 e-mail: ueda@ap.titech.ac.jp〉

スピン一重項状態の非局所相関は、量子論の奇妙な性質としてだけではなく、現在では量子情報処理の重要なリソースとして考えられている。我々は、この非局所相関が、運動する観測者や重力場中の観測者からどのように見えるかということ、相対論に基づき考察した。その結果、相関が見かけ上減少することを示し、完全な相関を得るための方法を議論した。

1. はじめに

近年の量子情報処理においては、エンタングルメント(量子状態のもつれ)が重要な役割を果たしている。¹⁾ そのエンタングルメントに由来する現象としては、アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼン (Einstein-Podolsky-Rosen; EPR) 相関が有名である。²⁾ 例えば、スピン 0 の粒子がスピン 1/2 粒子二つに崩壊し、二人の観測者がそれぞれの粒子のスピンを任意に選んだ方向で測定するとしよう。³⁾ 崩壊後のスピン状態は EPR 状態とも呼ばれるスピン一重項状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \quad (1)$$

で記述される。その結果、観測者同士がどんなに離れていようとも、また、測定方向がどの方向であろうとも、同じ方向で測定すれば二人の観測結果は完全に反相関し、測定方向が異なるにつれて反相関の度合いは減少する。このようなスピンの非局所的な相関は、元来は量子論の奇妙さを示すパラドックスと見なされたが、現在では量子情報処理の重要なリソースと考えられている。

我々は、この量子論特有の性質である EPR 相関の、特に相対論的な側面に関心を持ち研究した。これは、情報の担い手が物理量である限り、量子論だけでなく相対論の制約も受けるからである。海外においても相対論的な状況下での量子情報やエントロピーなどが研究され始めている。⁴⁻¹¹⁾ 本稿では、スピンを測定する観測者が運動している場合¹²⁾ や重力場中にいる場合¹³⁾ での、相対論的な EPR 相関について議論する。

2. 運動する観測者から見た EPR 相関

まず特殊相対論に基づき、観測者が運動しながらスピンの測定を行う場合について考えてみよう。簡単のため、観測者二人は粒子対の発生源に対し同じ方向に同じ速さで運動しているものとする。さらに、EPR 相関への効果を最大にするため、図 1 のように観測者の運動は粒子対の相対運動と直交する方向にとる。

実験室系(粒子源が固定されている系)での EPR 状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|p^{\mu}, \uparrow\rangle |p^{\mu}, \downarrow\rangle - |p^{\mu}, \downarrow\rangle |p^{\mu}, \uparrow\rangle) \quad (2)$$

のように書ける。ここで、 p^{μ} はそれぞれの粒子の 4 元運動量を表している。式 (1) とは異なり、スピン一重項状態であるスピン部分¹⁴⁾ だけでなく、運動量部分も明示したのは、次に述べるスピンのローレンツ変換のためである。

この EPR 状態が別の慣性系からどのように見えるかを知るためには、スピンに対してローレンツ変換を行う必要がある。状態 $|p^{\mu}, \alpha\rangle$ に対して、ローレンツ変換 Λ^{μ}_{ν} に対応するユニタリー演算子 $U(\Lambda)$ を作用させた場合の状態変化は、パウリ行列 σ を使って、

$$U(\Lambda) |p^{\mu}, \alpha\rangle = \sum_{\alpha'=\uparrow, \downarrow} \exp[i\sigma \cdot W(\Lambda, p)]_{\alpha'\alpha} |p^{\mu}, \alpha'\rangle \quad (3)$$

の形に書くことができる。^{15, 16)} ここで、 $W(\Lambda, p)$ はローレンツ変換と粒子の運動量に依存した関数を成分とする 3 次元ベクトルである。つまり、運動量が 4 元ベクトルとして $\Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$ に変換されると同時に、スピンも $W(\Lambda, p)$ に従って回転をする。これはウィグナー回転¹⁷⁾ として知られ、その回転軸と回転角はローレンツ変換だけでなく粒子の運動量にも依存している。この運動量依存性を持ったスピン回転がローレンツ変換特有の性質である。非相対論のガリレイ変換ではスピンは回転せず、また、空間回転によるスピン回転は粒子の運動状態(運動量)に依存しない。

今、観測者の系(観測者二人が共に静止している系)へのローレンツ変換を考えよう。 x 軸の正の方向に進む粒子に対するウィグナー回転は y 軸まわりの回転(図 1 では誌

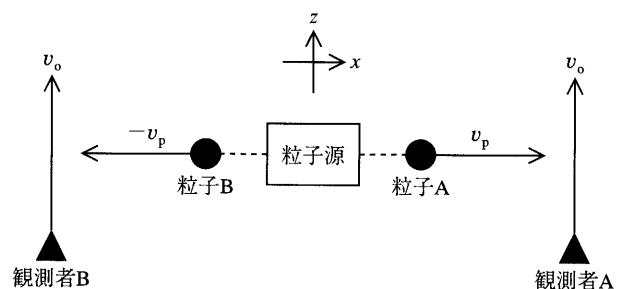


図1 運動する観測者による EPR 実験。粒子源から出射された粒子対は x 軸方向にそれぞれ速度 $\pm v_p$ で運動し、そのスピンを観測者は z 軸方向に共に速度 v_0 で運動しながら測定する。

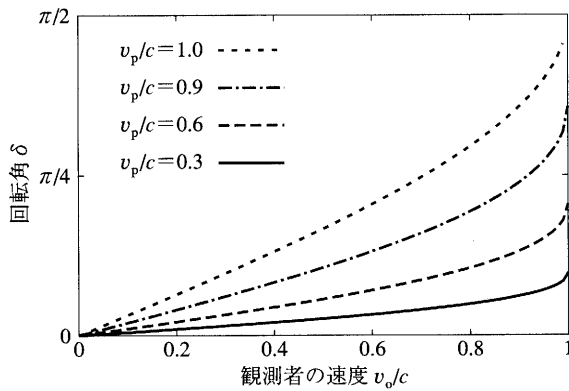


図2 ウィグナー回転の角度 δ . 横軸を観測者の速度 v_o とし、粒子の速度 v_p が光速 c の30%, 60%, 90%, 100%の場合についてプロット.

面内での回転)となる.¹⁸⁾ その回転角 δ は、粒子の速度を v_p 、観測者の速度を v_o としたとき、

$$\tan \delta = \frac{v_p v_o / c^2}{\sqrt{1 - (v_p/c)^2} + \sqrt{1 - (v_o/c)^2}} \quad (4)$$

で与えられる(図2). 一方、 x 軸の負の方向に進む粒子に対するウィグナー回転も y 軸まわりの回転になるのだが、その回転角は $-\delta$ である. すなわち、粒子の運動の向きが反対であるために、ウィグナー回転の向きも反対になっている. その結果、式(2)のEPR状態は観測者の系では

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \delta (|\Delta p_x^\pm, \uparrow\rangle |\Delta p_x^\pm, \downarrow\rangle - |\Delta p_x^\pm, \downarrow\rangle |\Delta p_x^\pm, \uparrow\rangle) + \sin \delta (|\Delta p_x^\pm, \uparrow\rangle |\Delta p_x^\pm, \uparrow\rangle + |\Delta p_x^\pm, \downarrow\rangle |\Delta p_x^\pm, \downarrow\rangle)] \quad (5)$$

となり、スピン三重項状態($\cos \delta$ の項)に加えてスピン三重項状態($\sin \delta$ の項)が現れる. 特に、 $v_o = v_p = c$ の極限では式(4)から $\delta = \pi/2$ となり、観測者から見たスピンは三重項状態になる. もし仮にウィグナー回転が双方の粒子で同じ向きであったなら、状態はスピン三重項状態のままであるが、実際には運動量依存性のために反対向きとなり、スピン三重項状態との重ね合わせになってしまう. つまり、空間回転に対して不変なスピン三重項状態も、ローレンツ変換に対しては不変ではないのである.

このような状態の変換から、観測者の系におけるEPR相関についてどのようなことがいえるだろうか? それは、スピン三重項状態との線形結合になっていることからわかるように、双方の観測者が同じ方向でスピンを測定したとしても、結果は完全な反相関にはならないということである. 例えば、 x 軸の正の方向に進む粒子のスピンを z 方向で測定して上向きという結果を得たとしても、もう一方のスピンを z 方向での測定結果は上下どちらの可能性も残される. 結果として、 $\cos^2 \delta$ の確率で反相関し、 $\sin^2 \delta$ の確率で正相関するので、これらの確率の差として定義される z 方向のスピン反相関係数は $+1$ ではなく $\cos 2\delta$ に減少する(図3). ここで注目すべき点は、観測者の系で「二人が同じ方向で測定している」ならば、実験室系から見ても「二人は同じ方向で測定している」と言えるという点である.¹⁹⁾ にもかかわらず、観測者が静止している場合に完全

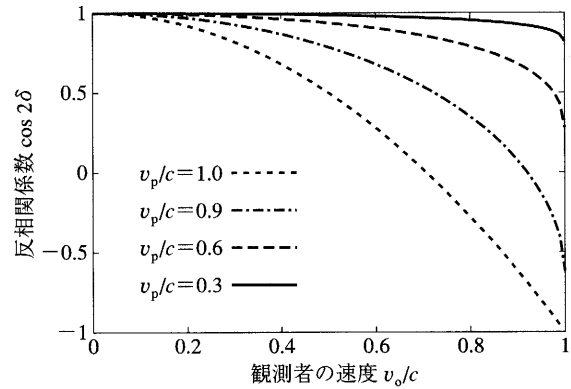


図3 反相関係数(=[反相関の確率]-[正相関の確率]). 横軸を観測者の速度 v_o とし、粒子の速度 v_p が光速 c の30%, 60%, 90%, 100%の場合についてプロット.

反相関していたものが、観測者が動いている場合にはそうではなくなってしまふ.

もっとも、このような反相関の減少は非局所相関自体が失われるということを意味しているわけではない. 実際、ウィグナー回転に合わせて測定方向を変えれば、完全な反相関を得ることができる. 具体的には、測定方向を同じ方向ではなく、そこから y 軸まわりにそれぞれ角度 δ と $-\delta$ だけ回転させた別々の方向にすればよい. ローレンツ変換はそれぞれの粒子ごとのユニタリー変換として作用するだけなので、エンタングルメントには影響を与えない.⁵⁾ しかし、反相関する測定方向の相対関係が変化するため、EPR相関を量子情報処理のリソースとして利用する場合には、観測者の運動状態も考慮する必要がある. エンタングルメントは測定結果が相関するための必要条件ではあるが、十分ではないのである.

以上の議論では質量のある粒子の場合を暗に仮定したが、実際のEPR相関の検証実験では質量を持たない光子対が用いられることが多い. 相対論においては質量があるかないかで粒子の性質が大きく異なるので、質量のない粒子の場合に上の計算をそのまま適用することはできない. しかし、ローレンツ変換による偏光面の回転¹⁶⁾に着目することで同様の結果を得ることができる.¹²⁾

3. 重力場中の観測者から見たEPR相関

次に、観測者が重力場中でスピンの測定を行う場合を考えよう. この場合、一般相対論により重力場が曲がった時空で表現されるため、離れた場所にいる二人の観測者の測定方向が同じであるか否かを直接言うことができなくなる. しかし、一方のベクトルをもう一方の場所に平行移動させてから比較することによって、同じ方向という概念が定義できる. では、そのように定義された同方向で粒子対を測定すれば、完全な反相関が得られるのだろうか? 実は、そうではないことがわかる.

それを議論するためにまず、曲がった時空でのスピンを定義しよう.²⁰⁾ 曲がった時空では一般に回転対称性が存在

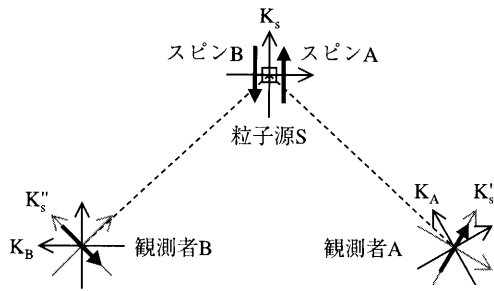


図4 局所ローレンツ系. 粒子源のあるSおよび観測者のいるA, Bの各点に導入した局所的なミンコフスキー座標系 K_S, K_A, K_B が濃い実線. K_S をA, Bまで平行移動させた座標系 K'_S と K''_S が薄い実線. 粒子の移動によるスピンの変化は平行移動による座標系の変化と同じ.

しないので, 一般座標系を使ってスピンを定義することは困難である. しかし, たとえ時空が曲がっていても, ごく小さいスケールでは時空は平坦であるとみなせるので, 各点ごとに局所的なミンコフスキー座標系 (ct, x, y, z) を導入することができる(局所ローレンツ系). この座標系とそのローレンツ変換性によって, 局所的には, 特殊相対論と同様にスピンを定義することが可能である.²¹⁾

そこでまず, 粒子源のある地点Sに局所的なミンコフスキー座標系 K_S を導入する(図4). 粒子源はその座標系に静止しながら, 粒子対を式(2)のスピナー重項状態で発生させるものとする. 同様に, 観測者がいる二つの地点AとBにもそれぞれ局所的なミンコフスキー座標系 K_A と K_B を導入する. 観測者A, Bはそれぞれ座標系 K_A, K_B に対して静止し, その座標系の適当な空間方向を選んで, 粒子のスピンを測定するものとする. 一般に, 観測者の座標系 K_A, K_B は粒子源の座標系 K_S と同じものではない. 正確に言えば, K_S を粒子の軌道に沿ってA, Bまで平行移動したときのミンコフスキー座標系 K'_S, K''_S は, 元々そこにある座標系 K_A, K_B とは一致しない(図4). K_A と K'_S の差および K_B と K''_S の差は, ミンコフスキー座標系間の変換である空間回転やローレンツ変換の組み合わせで表される.

粒子源から出た粒子対のスピンは, SからA, Bへ運動する際に, 座標系の平行移動と同じように変化する. つまり, スピンがSにおいて K_S のz方向を向いていたとすると, Aまで移動したときには K'_S のz方向を向いている(図4). Bへの移動も同様で, スピンが K_S で-z方向を向いていたならば, K''_S でも-z方向を向いている. そのため, K'_S と K''_S から見れば, 粒子対はA, Bにおいてもスピナー重項状態のままである. しかし, これらを観測者の局所ミンコフスキー座標系 K_A と K_B から見ると, 座標系の差により一般にスピナー重項状態とスピント重項状態が重ね合わされた状態として記述される. よって, A, Bにいる観測者が, 自分たちの座標系を基にした同方向(例えば, K_A のz方向と K_B のz方向)でスピンを測定しても, 完全な反相関は得られない. 完全な反相関を得るためには, K_A と K_B では別々な方向で測定する必要がある.

もし, K_A と K'_S の差および K_B と K''_S の差が空間回転の

みであるならば, どの方向を測定すべきかはわかりやすい. K'_S と K''_S では粒子対がスピナー重項状態のままであることから, 完全反相関する方向はその座標系を基にした同方向(例えば, K'_S のz方向と K''_S のz方向)になる. そのため, 観測者は K_A と K_B の中のこれらに相当するような空間方向でスピンを測定すればよく, 測定方向を K_A と K_B での同方向から, K'_S や K''_S との差の分だけ空間回転させることによって可能である. このA, Bでの測定方向を平行移動によってSまで戻せば, K'_S と K''_S の定義から K_S において一致する. すなわち, 平行移動で定義される同方向でスピンを測定すれば, 完全な反相関を相対論的に得ることができる.(もちろん, そのためには観測者は平行移動された座標系 K'_S, K''_S を知らなければならない.²²⁾)

問題は, K_A と K'_S の差や K_B と K''_S の差にローレンツ変換が含まれるような場合である. やはり K'_S と K''_S での同方向で完全反相関はするものの, 観測者がそれらの方向でスピンを測定することはできない. なぜならば, K_A や K_B のいかなる空間方向も, K'_S や K''_S の空間方向には一致しないからである. K'_S や K''_S の空間方向は, K_A や K_B からは時間と空間の混じった4次元的方向に見える. しかし, スピンには x, y, z の空間成分しかなく, 時間成分が存在しないので, 時空が混ざった方向でスピンを測定するという概念は明確ではない. では, 観測者が K_A や K_B のどの空間方向を選んで完全な反相関が得られないかというところではない. K_A や K_B から見ると, K'_S や K''_S との差のローレンツ変換によって, スピンは粒子の運動量に応じたウィグナー回転をして見える.(この状況は, K'_S と K''_S を実験室系, K_A と K_B を観測者の系と考えれば, 前節の運動する観測者の場合に相当する.) そのため, 測定方向を K_A と K_B での同方向から, この回転に合わせて空間回転させると, 完全な反相関が得られる. もちろん, このときの測定方向は K'_S と K''_S で見ても別々の(4次元的方向)であり, 曲がった時空での同方向にはなっていない. つまり, このA, Bでの測定方向を平行移動によってSまで戻しても, K_S において一致しない. 逆に言えば, 平行移動で定義される同方向でスピンを測定しても, 完全な反相関は得られないことになる. これは, 時空方向が4次元のベクトルであるのに対して, スピンは3次元のベクトルであることに由来する.

平行移動による一般相対論的な効果は地球の重力場では極めて小さい. 地球表面上での距離100キロメートルのEPR実験の場合, スピンの回転角は 10^{-11} ラジアン程度である. しかし, ブラックホール近傍のような極端な場合ではスピンの回転角は非常に大きく, さらに観測者の位置が変わるだけで大きく変化する. したがって, 観測者の位置に誤差が生じれば, 完全反相関する方向が不明確になり, EPR相関を利用することは困難になる.¹³⁾ 特に, 事象の地平線上ではスピン回転の角速度は発散してしまう.

4. おわりに

本稿では、運動する観測者や重力場中の観測者を導入し、スピンのEPR相関に対する相対論的効果を見た。その結果、ローレンツ変換によるスピンのウィグナー回転のために、“同方向”での反相関は減少してしまうことがわかった。もちろん、このことは非局所相関自体の減少を意味するものではない。2粒子間のエンタングルメントそのものはローレンツ変換に対して不変であり、ウィグナー回転に合わせて測定方向を調整し直せば、完全な反相関を得ることができる。この意味で、本稿で議論した効果は量子論の基礎論における問題というよりは、量子情報処理をする際の実際上の問題と考えられる。観測者が互いの運動状態を知らないまま、EPR状態を使って量子暗号や量子テレポーテーションを行えば、ビットエラーやフィデリティの減少が引き起こされてしまう。正確な情報処理を行うためには、観測者は互いの運動状態という情報を事前に共有し、完全反相関が得られる測定方向を把握しておく必要がある。

ところで、今回の研究では運動量の固有状態のみを考えたが、ウィグナー回転の性質は運動量の重ね合わせ状態を考えるとより顕著になる。^{4,6,23)} ウィグナー回転は運動量に依存するために、ローレンツ変換が運動量の重ね合わせ状態に作用すると、スピンも運動量成分に応じて様々な方向を向いた状態の重ね合わせになってしまう。これは、単一の粒子内でスピン自由度が運動量とエンタングルすることを意味している。つまり、ある慣性系でスピンと運動量が直積状態であったとしても、別の慣性系ではそれらがエンタングルした状態に見えるというのである。このように、量子情報処理のリソースであるエンタングルメントが、一粒子の変数間(運動量とスピン)とはいえ、慣性系を変えるだけで生成できるというのは興味深い事実である。

参考文献

- 1) 例えば、M. A. Nielsen and I. L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).
- 2) A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen: *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.
- 3) D. Bohm: *Quantum Theory* (Dover, New York, 1989) p. 611.
- 4) A. Peres, P. F. Scudo and D. R. Terno: *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 230402.
- 5) P. M. Alsing and G. J. Milburn: *Quantum Inf. Comput.* **2** (2002) 487.

- 6) R. M. Gingrich and C. Adami: *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 270402. H. Li and J. Du: *Phys. Rev. A* **68** (2003) 022108.
- 7) M. Czachor: *Phys. Rev. A* **55** (1997) 72. M. Czachor and M. Wilczewski: *Phys. Rev. A* **68** (2003) 010302(R).
- 8) S. J. van Enk and T. Rudolph: *Quantum Inf. Comput.* **3** (2003) 423.
- 9) P. M. Alsing and G. J. Milburn: *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 180404.
- 10) I. Fuentes-Schuller and R. B. Mann: *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 120404.
- 11) レビューとしては、A. Peres and D. R. Terno: *Rev. Mod. Phys.* **76** (2004) 93.
- 12) H. Terashima and M. Ueda: *Quantum Inf. Comput.* **3** (2003) 224; *Int. J. Quantum Inf.* **1** (2003) 93.
- 13) H. Terashima and M. Ueda: *Phys. Rev. A* **69** (2004) 032113.
- 14) ここで言うスピンとは、粒子の静止系から見たとしたときの角運動量のことを指している。このスピンは、ディラック方程式に現れるスピンとは異なり保存量なので、状態のラベルとしては適切である。D. R. Terno: *Phys. Rev. A* **67** (2003) 014102.
- 15) 大貫義郎:「ボアンカレ群と波動方程式」(岩波書店, 1976).
- 16) S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995) Chap. 2.5.
- 17) E. P. Wigner: *Ann. Math.* **40** (1939) 149.
- 18) これは、粒子と観測者の運動に対応する x 方向と z 方向のローレンツ変換は非可換であり、対応する生成子の交換関係が y 軸まわりの回転の生成子になっているためである。
- 19) ローレンツ変換によって空間座標は時間座標と混ざるが、それを含めても同じ方向である。
- 20) N. D. Birrell and P. C. W. Davies: *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).
- 21) この定義より、一般座標変換に対してはスピンは不変である。時空点が別の座標でラベルし直されるだけで、局所ローレンツ系は変化しないためである。
- 22) 本当にそれらが平行移動されたものであるかどうかを確認することは量子情報的な方法でも可能である。平坦な時空の場合ではあるが、次の論文が参考になる。E. Bagan, M. Baig and R. Muñoz-Tapia: *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 257903; *Phys. Rev. A* **69** (2004) 050303(R).
- 23) H. Terashima and M. Ueda: *J. Phys. A* **38** (2005) 2029.

(2005年12月6日原稿受付)

Relativistic Effects on the Einstein-Podolsky-Rosen Correlation

Hiroaki Terashima and Masahito Ueda

abstract: The non-local correlation of spins is now widely recognized as an important resource for quantum information processing. We address the issue of how the quantum correlation is modified when seen from observers in motion or in gravity, based on relativistic quantum theory. We then show an apparent decrease in the Einstein-Podolsky-Rosen correlation and discuss the proper way to utilize the perfect correlation.