

# スピノル・ボース・アインシュタイン凝縮で実現する非可換量子渦と、その衝突ダイナミクス

小林未知数 東京大学大学院総合文化研究科 〒 153-8902 東京都目黒区駒場 3-8-1

e-mail: michikaz@jiro.c.u-tokyo.ac.jp

川口由紀 東京大学大学院理学系研究科 〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1

email: yuki@cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp

新田宗土 慶応義塾大学日吉物理学教室自然科学研究教育センター 〒 223-8521 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1

email: nitta@phys-h.keio.ac.jp

上田正仁 東京大学大学院理学系研究科 〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1

email: ueda@phys.s.u-tokyo.ac.jp

近年、スピン自由度のあるボース・アインシュタイン凝縮体（スピノル BEC）が注目を浴びつつある。この系の特徴は、サイクリック相やノットなどの新奇な量子相やトポロジカル励起が期待できることである。非可換量子渦はその顕著な例である。スピンが2の原子からなる BEC のサイクリック相で実現される非可換量子渦の非可換性は渦の衝突ダイナミクスにおいてユニークな効果を示すことが最近明らかになった。本稿ではこの研究成果について報告する。

## 1 はじめに

ある対称性を持つ系が、相転移などに伴う対称性の破れによって、対称性の低い状態へと移るとき、その対称性の破れ方に対応したトポロジカル欠陥が素励起として出現する。トポロジカル欠陥の存在は、対称性の破れた系において普遍的に存在し、宇宙・高エネルギー物理から、素粒子物理、固体物理、ソフトマターに至る広範な研究領域で重要なテーマとなっている。トポロジカル欠陥の1種である

1次元状の線欠陥は、超流動・超伝導系に現れる量子渦、宇宙論で議論されている宇宙ひも、液晶のネマティック相におけるディスクリネーションなどとして現れるトポロジカル欠陥であり、実際にこのような線欠陥の存在およびダイナミクスが系の物性に大きく影響することは周知のとおりである。

トポロジカル欠陥の性質は、そのトポロジカルな構造によって決まり、系の詳細によらない普遍的なものである。後述する量子渦に代表される線欠陥の可換・非可換性は、線欠陥自身のダイナミクスを決める決定的な要因の1つである [1]。例えば宇宙論に現れる線欠陥である宇宙ひもの可換・非可換性は宇宙ひもの運動を支配し、その結果、宇宙ひもの観測可能性やダークマターの存在に宇宙ひもが関わっているのか否かなどを決定する要因となることが指摘されている [2]。

非可換な線欠陥およびそのダイナミクスを実現する理想的な系の1つが冷却原子系である。内部自由度を持つスピノルBECはその内部自由度を反映して、本稿のテーマである非可換量子渦（線欠陥）の他にもトフーフト・ポリヤコフモノポール（点欠陥）[3]、アリスリング[4]、スカーミオン[5]、ノット[6]など多彩なトポロジカル欠陥を有する。我々はスピンが2のスピノルBECのサイクリック相において非可換量子渦が実現し、その非可換性が渦の衝突ダイナミクスを支配することを見出した [7]。我々が発見した非可換量子渦の衝突ダイナミクスの著しい特徴は、それが非可換性のみによって決定される、従って、他の同様の非可換性を有する線欠陥においても普遍的に起こることである。それゆえスピノルBECは、例えば非可換な宇宙ひもなどのダイナミクスをシミュレートする格好の系となりうる。

以下ではこの非可換量子渦の簡単な解説から始めて、ス

ピン2のスピンルBECにおける非可換量子渦に関して我々が行ってきた研究について述べる。

## 2 非可換量子渦とその特徴

超流動や超伝導系などにおいて現れる量子渦は、よく知られたトポロジカル欠陥の1つである。トポロジカル欠陥は通常、対称性の破れ方によって決まるトポロジカル不変量によって特徴づけられる。量子渦の場合、トポロジカル不変量は量子渦を囲む閉経路に沿ったオーダーパラメーターの変化を調べることによって得られる。最も簡単な例として超流動 $^4\text{He}$ やスカラー-BECの場合を考えよう。この場合、系は複素数のオーダーパラメーターによって記述され、量子渦を囲む閉経路に沿って複素数の位相が $2\pi$ の整数倍だけ変化する。従って、この場合のトポロジカル不変量は渦の巻き数に対応した整数群 $\mathbb{Z}$ によって特徴づけられる。この例からも分かるように、量子渦のトポロジカル不変量は離散群によって特徴づけられるが、その離散群が非可換群となるような量子渦を非可換量子渦と呼ぶ。また可換群によって特徴づけられる量子渦を可換量子渦と呼ぶ。

量子渦が可換か非可換かという違いは衝突ダイナミクスにおいて最も顕著に現れる。可換量子渦の代表である超流動 $^4\text{He}$ やスカラー-BECにおける量子渦の場合、量子渦が衝突するとつなぎ換えを起こすことが知られている[8]。他の可換量子渦の例である $^3\text{He-A}$ 相やスピン1・スピンルBECのポーラー相において現れる半整数量子渦[9]では、つなぎ換えあるいは渦のすり抜けのダイナミクスが可能である。可換量子渦の衝突ダイナミクスの非常に特殊な例として、第1種超伝導体における磁束量子や互いに引力相互作用をする2成分BECなど、量子渦がお互いに引力相互作用をす

る場合には、衝突する2本をつなぐ新たな量子渦が形成されることが理論的に予想されている [10]。このような量子渦を梯子の段 (ラング) とのアナロジーからラング渦と呼ぶことにする。ただし可換量子渦の衝突におけるラング渦形成は非常に稀で、衝突速度や渦系の相対角度の非常に狭いレンジにおいて起こる。一方、非可換量子渦が衝突すると可換量子渦で起こっていたつなぎ換えやすりがトポロジカルに禁止され、可換量子渦のときには例外的であったラング渦形成が主要な衝突ダイナミクスとなる。また、2本の非可換量子渦の渦輪が絡み目を形成している場合には、渦輪の衝突によってラング渦が形成されるため、その絡み目ははずれない。これは渦輪の絡み目がはずれることのできる可換量子渦と対照的であり、量子渦の可換・非可換性を峻別する決定的なダイナミクスとなっている。これらのダイナミクスに関する代数的な考察については文献 [7] を参照されたい。

非可換量子渦と類似の線欠陥が議論されている興味深い他の物理系として、宇宙論における宇宙ひもがある。宇宙ひもは量子渦と同様の線欠陥であり、衝突ダイナミクスは宇宙ひもの数密度を決定する上で非常に重要である。宇宙ひもが可換な場合、それらが衝突するとつなぎ換えが起こり、つなぎ換えを通して宇宙ひもが小さなスケールへとカスケードし、最終的に小さな宇宙ひもの輪が消滅することによって、その数密度が減少することがいくつかの理論モデルにおいて提唱されている [11]。またこれは現在の宇宙背景放射の観測結果と矛盾していない。しかし宇宙ひもが非可換な場合はつなぎ換えが起こらず、衝突により次々と生成されたラング状の宇宙ひもの大規模なネットワーク構造のことが予想されている。具体的にトポロジカル不変量が非可換群である3次の置換群  $S_3$  となるような宇宙

ひものシミュレーションが行われており、宇宙ひものネットワーク構造が確認されている [12]。このような宇宙ひものラングがダークマターの候補の1つとして考えられている [2]。非可換量子渦はダークマターをシミュレートする1つのモデルとして捉えることができ、非可換量子渦のダイナミクスを調べることによって、例えば宇宙空間におけるダークマターの質量分布等を推察することができるかもしれない。

また素粒子論においては、ウィルチェック、プレスキルらによって、オーダーパラメーターの対称性を記述する群が非可換局所 (ゲージ) 対称性である場合に、存在する非可換渦同士の非可換アハラノフ・ボーム散乱が議論されている [13]。さらに、この非可換渦の散乱は、組みひも群、ホップ代数、ヤン・バクスター方程式と深い関連がある [14]。これらは非自明な統計に従うため、非可換工ニオンの候補でもある。スピノル BEC の非可換渦は、群が大域的対称性である点が異なるが、このような代数的構造は共通であろうと期待できる。

### 3 スピノル BEC における非可換量子渦

次にスピンの2の原子からなる BEC における非可換量子渦について述べる。スカラー BEC や原子のスピンの1の BEC の場合と異なり、スピン2のボース系では3つの粒子がシングレット状態を形成して凝縮することが可能であり、この状態がサイクリック相である [15]<sup>1</sup>。平均場近似でスピン2・スピノル BEC は5成分の複素オーダーパラメーター  $\Psi = (\Psi_2, \Psi_1, \Psi_0, \Psi_{-1}, \Psi_{-2})$  によって記述される。スピノル BEC のオーダーパラメーターはスピン空間におい

<sup>1</sup>正確には、この凝縮状態がスピン量子化軸に対する対称性を破った状態がサイクリック相である。

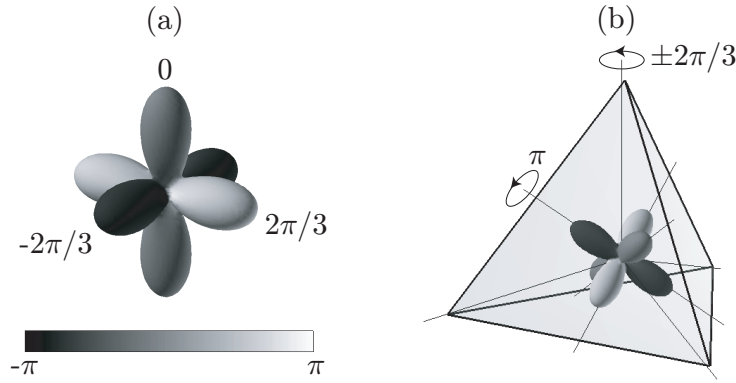


図 1: (a): サイクリック相のオーダーパラメーターの球面調和関数を用いた表示。サイクリック相でオーダーパラメーターはトライアドの構造をとる。トライアドの表面の色はオーダーパラメーターの位相を表し、トライアドの軸ごとに  $2\pi/3$  ずつずれている。(b): トライアドと正四面体の関係。トライアドを不変に保つ変換は以下のとおり。(i) トライアドの軸周りの  $\pi$  回転。(ii) トライアドの 3 つの軸の中心を通る軸周りの  $\pm 2\pi/3$  回転 (この回転によって軸が入れ替わる) と  $\pm 2\pi/3$  のゲージ変換 (このゲージ変換によって軸の位相が回転前と同じになる)。トライアドを不変に保つための回転は正四面体を不変に保つ回転に対応する。

て異方的な構造を持っており、スピン空間における対称性がすなわちオーダーパラメーターの対称性となる。スピン空間におけるサイクリック相の構造は球面調和関数を用いると、図 1(a) のような 3 つ組 (トライアド) の構造によって表現される。トライアドの表面の色は複素オーダーパラメーターの位相を表しており、トライアドのそれぞれの軸ごとに  $2\pi/3$  ずつずれている。このトライアドを不変に保つような回転を考えてみよう。トライアドの軸をそれぞれ  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  とする。まず  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  軸周りの  $\pi$  回転によってトライアドは不変である。また  $(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})/\sqrt{3}$ ,  $(\hat{x} - \hat{y} - \hat{z})/\sqrt{3}$ ,  $(-\hat{x} + \hat{y} - \hat{z})/\sqrt{3}$ ,  $(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})/\sqrt{3}$  の 4 種類の軸のどれかの周りに  $2\pi/3$  回転させると、軸がそれぞれ入れ替わり、さらに  $2\pi/3$  のゲージ変換を施すと元の状態に戻る。回転と

ゲージ変換を  $2\pi/3$  から  $-2\pi/3$  にしてもトライアドは不変である。これに恒等変換を加えると、トライアドを不変に保つ変換は12種類あることになる。また図1(b)から分かるように、これらの変換はトライアドを覆う正四面体を不変に保つ回転に対応している。その結果、サイクリック相に現れる量子渦のトポロジカル不変量は非可換な正四面体回転群  $T$  によって特徴付けられることになる。このようにスピン2・スピノルBECのサイクリック相に現れる量子渦は非可換量子渦の非常にシンプルなモデルとなっている。

ここで実験におけるスピン2・スピノルBECとサイクリック相について簡単に触れておく。スピン2・スピノルBECは、光学トラップ中の冷却原子気体において実現されている。冷却原子気体におけるスピン自由度は超微細スピン  $F = I + S$  によって実現される。ここで  $I$  は核スピン、 $S$  は電子スピンである。スピン2・スピノルBECとして最もよく実験が行われているのは、 $F = 2$   $^{87}\text{Rb}$  ( $I = 3/2$ ,  $S = 1/2$ ) のBECである。 $F = 2$   $^{87}\text{Rb}$  のBECの基底状態は上記のサイクリック相とネマティック相(2つの粒子がシングレット状態を形成して凝縮した状態がスピン量子化軸に対する対称性を破った状態)の相境界近傍にある。いくつかの実験によると[16]、 $F = 2$   $^{87}\text{Rb}$  のBECの基底状態はネマティック相である可能性が示唆されているが、外部磁場によってサイクリック相が壊されている可能性も否定できず、どちらの状態にあるのかはまだ確定していない[17]。

我々はスピン2・スピノルBECのオーダーパラメーター  $\Psi$  の時間発展を記述するグロス・ピタエフスキー方程式の数値シミュレーションを用いて、サイクリック相における非可換量子渦の衝突を調べた。非可換量子渦の基本的な性質に特化して調べるという目的のため、本シミュレーショ

ンでは実験の状況から少し離れて、サイクリック相と非可換量子渦が特に安定となるようなパラメーターを用いて行うこととした。非可換・可換の違いを調べるために、シミュレーションには以下の3種類のトポロジカル不変量の対に対して量子渦の衝突を調べる。

- 同じトポロジカル不変量
- 可換で種類が異なるトポロジカル不変量
- 非可換なトポロジカル不変量

また初期状態として2本のねじれの位置にある直線渦と2本の絡み目を作った量子渦輪の2種類の状態を用意する。シミュレーション結果をまとめたものが図2である。直線渦が衝突した場合、トポロジカル不変量が同じ場合にはつなぎ換えが起こり(図2(a))、可換で種類が異なる場合には通り抜けが起こっている(図2(b))。しかし非可換な場合には、2本の渦の間に新たなラング渦が生成していることがわかる(図2(c))。これらの結果は代数的な考察から得られる予想と、生成されるラング渦のトポロジカル不変量を含めて完全に一致している[7]。またこれらの結果は渦の衝突速度や衝突角度に全く依存せず、まさにトポロジカルな性質のみで決まることが確かめられる。絡み目を持った量子渦が衝突した場合、トポロジカル不変量が同じ場合にはつなぎ換えによって大きな渦輪となり(図2(d))、可換で種類が異なる場合には通り抜けが起こることによって絡み目がはずれる(図2(e))。大きな渦輪が再結合を介して再度2つの渦輪に分裂することがトポロジカルに可能である。しかし非可換な場合には、衝突によってラング渦が生成するために、絡み目がはずれない(図2(f))。つまりお互いに非可換な量子渦輪が絡み目を作った場合、これは



絡み数で特徴づけられるようなトポロジカル欠陥となることを意味し、これは可換量子渦とは本質的に異なる特徴である。これらの結果も代数的な考察だけから再現することができる。

## 4 おわりに

以上で述べてきたように、非可換量子渦のトポロジカルな性質は、その衝突のダイナミクスを大きく支配する決定的な要因となる。我々はスピン2・スピノルBECのサイクリック相という具体的な系を用いてこのことを明らかにしたが、ここで得られた結果は非可換な線欠陥を有する他の系、例えば2軸性液晶やコレステリック液晶のディスクリネーション、非可換な宇宙ひも、内部自由度のある超伝導体中の磁束量子などに対しても普遍的に成り立つ。このことは、冷却原子スピノルBECがこれらの系をシミュレートし、非可換性によって決まる一般的な性質を理解するための良い系であることを意味している。本研究がこのような系のさらなる発展につながることを期待したい。

さらに、非可換量子渦が新しいパラダイムシフトを引き起こすかもしれない重要な研究分野の1つが量子乱流である [18]。量子乱流とは量子渦の複雑な配置及びダイナミクスによって実現される乱流状態のことである。量子乱流を理解する重要な鍵となるのが量子渦のダイナミクス、特にカスケード過程である。乱流中ではつなぎ換えを通して大きな渦輪が小さな渦輪へとカスケードし（リチャードソンカスケード）、またつなぎ換えによってできる渦のカスプを通してケルビン波と呼ばれるらせん状の波が励起され、このケルビン波がさらに短い波長の波へとカスケードする（ケルビン波カスケード）。このようにつなぎ換えが量子渦

ダイナミクスとそのカスケード過程の最も重要な要素であると広く信じられている。この渦が非可換となってつなぎ換えの代わりにラング渦の形成が渦のダイナミクスを支配すると乱流はどうなるであろうか？予想される1つの結果としてラング渦による量子渦の大規模なネットワーク構造が形成され、リチャードソンカスケードもケルビン波カスケードも劇的に変化する（抑制される）ことによって、従来の量子乱流とは全く異なった振る舞いが期待できるであろう。また、これが真実であれば、逆に今までの量子乱流がつなぎ換えによって支配されていたという「仮定」の正しいことが強く示唆されるであろう。この「非可換量子乱流」が量子乱流を根本的な観点から理解するための新しい分野となることを期待しつつ筆を置くこととする。

## 参考文献

- [1] V. Poenaru and G. Toulouse, *J. Phys. (Paris)* **38** 887 (1977); N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51** 591 (1979).
- [2] M. Bucher and D. N. Spergel, *Phys. Rev. D* **60** 043505 (1999).
- [3] H. T. C. Stoof, E. Vliegen, and U. Al Khawaja, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120407 (2001).
- [4] J. Ruostekoski, J. R. Anglin, *Phys. Rev. Lett.* **91** 190402 (2003).
- [5] L. S. Leslie, A. Hansen, K. C. Wright, B. M. Deutsch, and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 250401 (2009).
- [6] Y. Kawaguchi, M. Nitta, M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **100** 180403 (2008).
- [7] M. Kobayashi, Y. Kawaguchi, M. Nitta, and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **103** 115301 (2009).
- [8] J. Koplik and H. Levine, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1375 (1993); **76** 4745 (1996).

- [9] G. E. Volovik, *Exotic Properties of Superfluid Helium 3* (World Scientific, Singapore, 1992); U. Leonhardt and G. E. Volovik, JETP Lett. **72** 46 (2000).
- [10] P. Laguna and R. A. Matzner, Phys. Rev. Lett. **62** 1948 (1989); N. Bevis and P. M. Saffin, Phys. Rev. D **78** 023503 (2008).
- [11] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994).
- [12] D. Spergel and U. L. Pen, Astrophys. J. **491** L67 (1997); P. McGraw, Phys. Rev. D **57** 3317 (1998).
- [13] F. Wilczek, Y. -S. Wu, Phys. Rev. Lett. **65**, 13 (1990); M. G. Alford, J. March-Russell, F. Wilczek, Nucl. Phys. B **337**, 695 (1990); J. Preskill, L. M. Krauss, Nucl. Phys. B **341**, 50 (1990).
- [14] F. A. Bais, P. van Driel, M. de Wild Propitius, Phys. Lett. B **280**, 63 (1992); H. -K. Lo, J. Preskill, Phys. Rev. D **48**, 4821 (1993).
- [15] M. Ueda and M. Koashi, Phys. Rev. A **65** 063602 (2002).
- [16] H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjäger, M. Kottke, S. van Staa, L. Cacciapuoti, J. J. Arlt, K. Bongs, and K. Sengstock, Phys. Rev. Lett. **92**, 040402 (2004); T. Kuwamoto, K. Araki, T. Eno, and T. Hirano, Phys. Rev. A **69**, 063604 (2004); A. Widera, F. Gerbier, S. Fölling, T. Gericke, O. Mandel, and I. Bloch, New J. Phys. **8**, 152 (2006).
- [17] S. Tojo, T. Hayashi, T. Tanabe, T. Hirano, Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda, Phys. Rev. A, **80**, 042704 (2009).
- [18] W. F. Vinen and R. J. Donnelly, Phys. Today **60**, No. 4 43 (2007).
- [19] ダイナミクスアニメーションは <http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~michikaz/physics/collision/collision.html> で見ることができる。

# **Non-abelian vortices and their collision dynamics in spinor Bose-Einstein condensates**

Michikazu Kobayashi, Yuki Kawaguchi, Muneto Nitta, Masahito Ueda

Bose-Einstein condensates (BECs) with spin degrees of freedom are predicted to realize non-abelian vortices. Non-abelian vortices are now studied in various research arenas such as cosmology, high-energy physics, solid-state physics, and soft matter physics. We report the unique collision dynamics of non-Abelian vortices realized in the cyclic phase of a spin-2 spinor BEC.

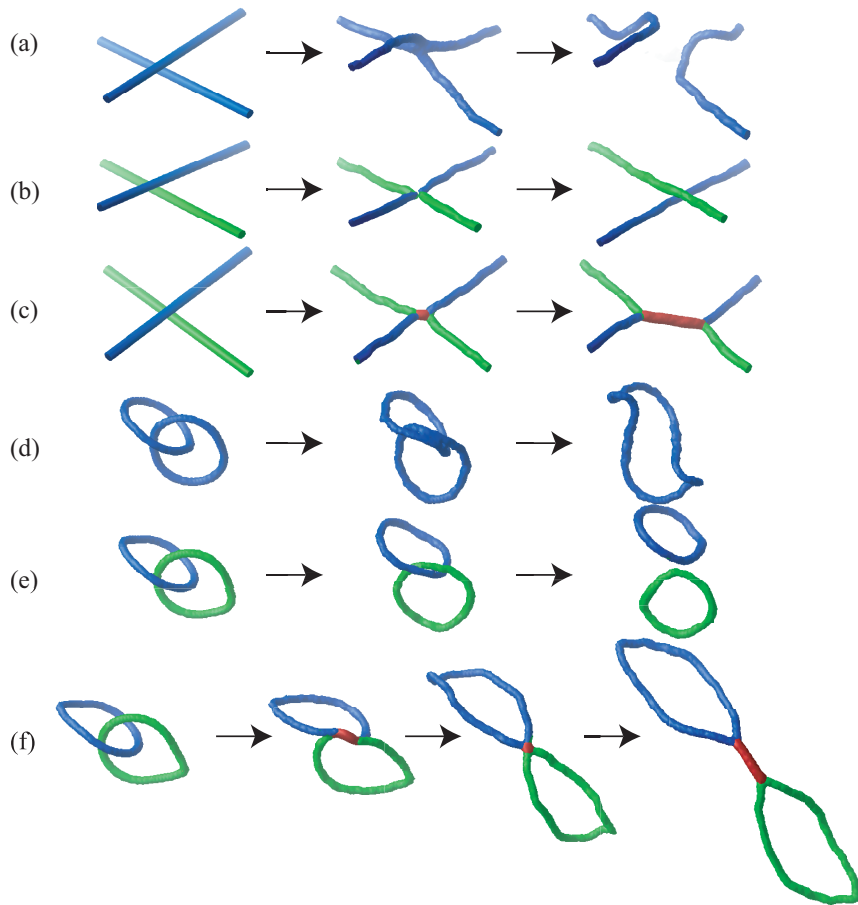


図 2: 量子渦の衝突シミュレーション [19]。(a)-(c) : 直線渦の衝突。(a) : つなぎ換え (同じトポロジカル不変量)。 (b) : 通り抜け (可換で種類が異なるトポロジカル不変量)。 (c) : ラング渦の生成 (非可換なトポロジカル不変量)。 (d)-(f) : 絡み目を作った渦輪の衝突。(d) : 渦輪が合体し 1 つの大きな渦輪になる (同じトポロジカル不変量)。 (e) : 絡み目が通り抜けてはずれる (可換で種類が異なるトポロジカル不変量)。 (f) : 絡み目がはずれない (非可換なトポロジカル不変量)。