量子推定理論による不確定性関係の定式化

渡辺　優　〈京都大学基礎物理学研究所　yuwata@yukawa.kyoto-u.ac.jp〉
上田正仁　〈東京大学理学系研究科　ueda@phys.s.u-tokyo.ac.jp〉

不確定性関係は量子力学の本質を端的に表現する関係式として知られているが，その意味するところは見かけほど単純ではない．不確定性関係の研究はハイゼンベルクがガンマ線顕微鏡で電子の位置と運動量の測定精度に関する思考実験を行ったことにはじまる．ガンマ線で電子の位置をΔxの精度で測定すると，測定の反作用を受けて運動量がΔpだけ不確定になり，両者が不確定性関係

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar/2$$

を満足するという主張である．この不確定性関係は，測定器の役割が物理量の測定結果に本質的な役割を果たすというボーアの相補性を端的に表現したものであると解釈できる．一方，標準的な量子力学の教科書で議論される，物理量の標準偏差の間に成立する不確定性関係は「互いに非可換な物理量が同時に定まった値を持つことはできない」という量子状態の非決定性を表している．これは，測定の相補性の数学的な証明であると間違って紹介されることもある．しかし，相補性と非決定性は全く異なった概念である．実際，後者は任意の波動関数に対して数学的に不等式が証明できる概念であるが，前者は誤差とは何か，擾乱とは何かを指定してはじめて具体的な意味を獲得する．不確定性関係が今なお最先端の研究対象として議論されているのは，誤差と擾乱に関して万人に共通する認識が未だ確立されていないからである．

ハイゼンベルクのガンマ線顕微鏡の議論は，粒子を古典的に扱った半古典論であるため，現代的な量子測定理論の枠内で考えた場合に，誤差と擾乱の間にどのような不確定性関係が成立するのだろうかという自然な疑問が沸き起こる．しかしながら，量子測定理論では測定される対象系だけでなく測定器も量子力学にしたがうため，対象系の量子揺らぎだけでなく測定器の量子揺らぎも測定結果に影響し，その解析は単純ではない．一般の測定過程について，測定器の出力と対象となる物理量の間の関係を明らかにし，対象について有意な情報を取り出す合理的な方法は何か，という問題が生じる．このような問題に対して解答を与えるのが量子推定理論である．

量子推定理論の観点からは，測定誤差は測定によって得られたフィッシャー情報量の逆数として与えられる．フィッシャー情報量は統計学における最も重要な量の一つであり，測定データから推定された物理量の推定精度を与える．すなわち，物理量の変化に対応して，測定値がどれだけ変化するかという感度を与える量である．

測定の反作用の影響で，測定過程はユニタリではなくなり，非可逆な過程となる．そのような非可逆な過程では情報量は単調減少するため，測定過程の非可逆性を失われた情報量として特徴付けられる．したがって，擾乱は対象系の持つフィッシャー情報量の損失として定式化できる．

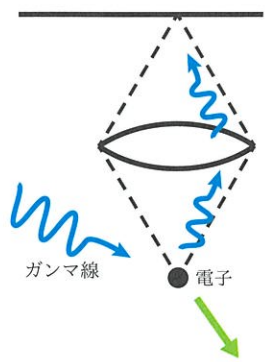
我々は，このように定式化された誤差と擾乱の積の下限が交換関係で与えられるというトレードオフ関係を見出した．こうして，ハイゼンベルクが思考実験で指摘した測定誤差と擾乱の間の不確定性関係が量子推定理論の観点から定量的に示された．

—Keywords—

ハイゼンベルクの思考実験：
ハイゼンベルクは自身の提出した量子力学の行列理論の物理的な意味を考察するために，いくつかの思考実験を提示した．最も有名なものは1927年の論文で議論された「ガンマ線顕微鏡の思考実験」である（下図）．この思考実験では，電子の位置を正確に測定するためには，波長の短い光（＝ガンマ線）が必要であることを述べた上で，そのような波長の短い光は大きな運動量を持つために電子の運動量を大きく変えてしまい，電子の運動量を不確定としてしまうことが論じられた．

フィッシャー情報量：
確率分布関数に現れるパラメータに関して，分布関数が持っている情報量を表したもの．フィッシャー情報量が大きいほど，パラメータに対する原理的な推定精度が向上する．

量子推定理論：
統計学における推定理論を量子力学に拡張した理論．実験の観測データから，物理系についての推定や得られる情報の限界について考察する．



ガンマ線顕微鏡の思考実験の模式図．電子から散乱されるガンマ線を観測することによって電子の位置を測定する．

1. はじめに

標準的な量子力学の教科書で議論される2つの物理量AとBの標準偏差$\sigma(A)^2:=\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2$の間に成立する不確定性関係

$$\sigma(A)\sigma(B)\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| \tag{1}$$

は測定される系そのものの量子揺らぎの性質を記述している．ここで，$\langle A\rangle$は系の密度演算子ρを用いて$\langle A\rangle:=\mathrm{Tr}[\rho A]$で与えられる．ケナード・ロバートソンの関係式[1,2]と呼ばれる不等式(1)は，位置と運動量のような非可換な観測量が，量子揺らぎのため同時に決まった値をとれないという量子状態の非決定性を表している．これに対して，ある物理量Aを測定すると，一般にそれとは共役な物理量Bに測定の反作用が及ぶ．このためAを精度よく知ろうとすればするほどBへの擾乱が大きくなる．ハイゼンベルク[3]がガンマ線顕微鏡の思考実験で考察したのは，この測定精度と測定の反作用による擾乱の間のトレードオフ関係である．このことから，互いに非可換な物理量の測定精度の間にもトレードオフ関係の存在が予想される．この問題を現代的な量子測定理論の枠内で考えた場合に，誤差と擾乱の間にどのような不確定性関係が成立するのだろうかという自然な疑問が沸き起こる．しかしながら，実際にどのように擾乱が及ぶかは測定過程の詳細に依存するために，このプロセスの分析は単純ではない．特に，測定器の出力結果から知りたい物理量についての情報を得る合理的方法は何かという問題に直面する．2章で述べるように，量子推定理論における不偏推定量あるいは一致推定量の構成方法は，まさにこのような問題に対する答えを与えてくれる．[4,5]

ボーアが指摘したように，[6] 量子論が古典論と決定的に異なる点は，量子系の性質は系と測定器との相互作用を通じて発現し，測定結果は古典的な（重ね合わせではない）値として出力される．したがって，我々は古典的な出力値から測定前と後の量子状態を推定しなければならない．この問題は量子測定における相補性と呼ばれ，これまで多くの研究がなされてきた．量子測定理論においては，測定対象だけでなく測定器も量子力学にしたがうため，測定結果や測定の反作用を受けた状態には測定器の量子揺らぎも影響する．アーサーズとグッドマン[7]は，対象系の任意の量子状態ρに対して，測定器のメーターを記述する物理量M_Aと測定対象の物理量Aとの間に，関係式

$$\mathrm{Tr}[(\rho\otimes\omega)U^\dagger M_A U]=\langle A\rangle \tag{2}$$

が成り立つ場合を考えた．ここで，ωは測定器の初期状態，Uは対象系と測定器との間のユニタリ相互作用を表す．条件(2)は，系の任意の初期状態に対してメーターの期待値が物理量の期待値と一致することを要請している．任意のρに対して条件(2)が満足される測定は不偏測定と呼ばれ，不確定性関係を考える上で重要な役割を果たす．このとき，測定結果の揺らぎ$\sigma'(M_A)^2:=\mathrm{Tr}[(\rho\otimes\omega)U^\dagger M_A^2 U]-\mathrm{Tr}[(\rho\otimes\omega)U^\dagger M_A U]^2$には対象系と測定器の量子揺らぎが合算され，測定結果の揺らぎの積の下限が

$$\sigma'(M_A)\sigma'(M_B)\geq|\langle[A,B]\rangle| \tag{3}$$

のように，ケナード・ロバートソンの不等式(1)と比べて2倍になる．このとき，測定過程による揺らぎの増分

$$\varepsilon_{\mathrm{AG}}(A)^2:=\sigma'(M_A)^2-\sigma(A)^2\geq 0 \tag{4}$$

は不偏測定の場合の測定誤差と見なすことができ，これに対して次のトレードオフ関係が成り立つ．[7]

$$\varepsilon_{\mathrm{AG}}(A)\varepsilon_{\mathrm{AG}}(B)\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| \tag{5}$$

小澤は不偏性が成立しないような一般的な量子測定過程においては，誤差と擾乱の間に不等式(5)のようなトレードオフ関係は成立せず，系の量子揺らぎも含めたより一般的な不確定性関係

$$\varepsilon_{\mathrm{O}}(A)\eta_{\mathrm{O}}(B)+\varepsilon_{\mathrm{O}}(A)\sigma(B)+\sigma(A)\eta_{\mathrm{O}}(B)\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| \tag{6}$$

が成立することを示した．[8] また，実験的検証もなされた．[9,10] ここで，

$$\varepsilon_{\mathrm{O}}(A)^2:=\mathrm{Tr}[(\rho\otimes\omega)(U^\dagger M_A U-A)^2] \tag{7}$$
$$\eta_{\mathrm{O}}(B)^2:=\mathrm{Tr}[(\rho\otimes\omega)(U^\dagger BU-B)^2] \tag{8}$$

は小澤によって導入された誤差と擾乱である．不偏測定でない場合はM_AとAの間に相関が生じるため式(7)で定義された誤差は一般には式(4)とは一致しない．

不偏測定でない簡単な例として，測定結果がg倍に増幅された測定

$$\mathrm{Tr}[(\rho\otimes\omega)U^\dagger M_A U]=g\langle A\rangle \tag{9}$$

を考えてみよう．このとき，不偏性の条件(2)が成立しないので，不等式(5)は成立しないが不等式(6)は数学的に成立する．しかし，この場合は増幅率で割った$g^{-1}M_A$を改めてメーターを記述する物理量とみなせば不偏性は回復し，不等式(5)も成立する．[11] 実際，量子光学では，出力信号を増幅率gで割った量で雑音を評価し，入力等価雑音と呼ばれる．[12]

一般の測定過程においては，測定値と物理量との対応関係は非自明であり，測定値をどう変換すれば不偏性を満足するようなメーター本来の物理量を構成できるかという問題が生じる．この問題に答えを与えるのが量子推定理論である．後に述べるように，量子推定の基本的な問題意識は，未知の状態の物理量の期待値を測定結果からどのように推定するのか，また，そのときの推定精度はいくらか，というものである．したがって，上の例ではメーターの値を増幅率gで割った値が本来推定したい物理量となる．不偏性を要請する推定理論では，このようなスケーリングが自然な形で取り入れられる．我々は，量子推定理論を用いて誤差と擾乱を定式化することで，誤差と擾乱の積が満たすト

レードオフ関係を導出した．ここで導入された誤差と擾乱には推定論的に有意な情報（測定の不可逆性など）が含まれており，その結果，誤差と擾乱の積の下限が交換関係で与えられる．以下ではこれらについて述べる．

2. 量子推定理論による誤差および擾乱の定式化

ハイゼンベルクがガンマ線顕微鏡の思考実験を行った当時は，一般の量子測定過程を記述する数学的手法は存在していなかった．しかし，現在では一般の量子測定過程を数学的に記述する手法が確立されており，量子情報や量子制御，量子光学などでよく用いられている．[13-15] 一般の量子測定過程は測定演算子（クラウス演算子）と呼ばれる演算子の集合 $\boldsymbol{K}=\{K_{i,j}\}$ を用いて表される．[16] ここで，測定演算子の1つ目の添字 i は測定結果を識別するラベルであり，2つ目の添字 j は測定結果からは区別することのできない量子状態の変化を識別するラベルである．量子状態 ρ に対して測定 $\boldsymbol{K}$ を行った場合，i 番目の測定結果を得る確率 p_i は，

$$p_i=\sum_j \mathrm{Tr}\left[K_{i,j}\rho K_{i,j}^\dagger\right] \tag{10}$$

によって与えられ，i, j について平均された測定後の量子状態 ρ' は

$$\rho'=\sum_{i,j} K_{i,j}\rho K_{i,j}^\dagger \tag{11}$$

で与えられる．

物理量 A の誤差の無い測定（射影測定）は，A のスペクトル分解に対応する射影演算子 P_i が測定演算子となっている場合，すなわち，$\boldsymbol{K}=\{P_i\}$ に対応する．測定演算子を用いることで，誤差を含んだ一般の測定過程をも記述することが可能になる．

独立かつ同一の（independent and identically distributed; i.i.d.）未知の量子状態 ρ が n 個与えられた場合に，$\langle A\rangle$ を測定結果から推定することを考える．このとき，測定データとして意味のあるものは，各々の測定結果 i が得られた回数 n_i だけであり（$n=\sum_i n_i$），推定値はそれらの関数 $A^{\mathrm{est}}(n_1, n_2, \cdots)=:A^{\mathrm{est}}(\boldsymbol{n})$ となる（この測定データから推定値への関数は推定量と呼ばれる）．測定が不偏性条件(2) を満たす場合，$\langle A\rangle$ の推定量は，M_A の固有値 m_i を用いて

$$A^{\mathrm{est}}(\boldsymbol{n})=n^{-1}\sum_i n_i m_i \tag{12}$$

で与えられる．すなわち，測定値 $\{m_i\}$ の頻度平均によって $\langle A\rangle$ を推定することができる．なぜなら，推定量の期待値が $\mathbb{E}[A^{\mathrm{est}}]=\langle A\rangle$ を満たすからである．このような推定は不偏推定と呼ばれる．ここで，$\mathbb{E}[A^{\mathrm{est}}]:=\sum_n A^{\mathrm{est}}(\boldsymbol{n})p(\boldsymbol{n})$，また，$p(\boldsymbol{n})$ は各測定結果 i が n_i 回得られる確率である．このとき，推定量の分散は $\mathbb{V}[A^{\mathrm{est}}]:=\mathbb{E}[(A^{\mathrm{est}})^2]-\mathbb{E}[A^{\mathrm{est}}]^2=n^{-1}\sigma'(M_A)^2$ となる．したがって，式(4) で与えられていた測定過程による揺らぎの増分は，

$$\varepsilon_{\mathrm{AG}}(A)^2=n\mathbb{V}[A^{\mathrm{est}}]-\sigma(A)^2 \tag{13}$$

と書き直せることがわかる．

不偏測定の場合は不偏推定量を構成することは容易であるが，一般の測定においては不偏推定量が存在するとは限らず，不偏性の代わりに確率収束性 $A^{\mathrm{est}}\xrightarrow{P}\langle A\rangle$ などで代用することが多い．このような推定量は一致推定量と呼ばれる．一致推定量の中で最適な，つまり分散が最小となる推定方法として，最尤推定法（Maximum Likelihood Estimator; MLE）と呼ばれる最適な推定方法が知られている．[17] 更に，任意の測定に対して，

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}[A^{\mathrm{MLE}}]\geq\sigma(A)^2 \tag{14}$$

が成り立つことが，後で述べるフィッシャー情報量とそれが満たす量子クラメル・ラオ不等式から示せる．[18,19] このことは，量子揺らぎを超えた精度で物理量 A を測定することができないことを意味している．また，不等式(14) の等号は A に対応する射影測定によって達成される．したがって，定義(13) に対応して，任意の測定 $\boldsymbol{K}$ における物理量 A の測定誤差は

$$\varepsilon(A;\boldsymbol{K}):=\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}[A^{\mathrm{MLE}}]-\sigma(A)^2 \tag{15}$$

で定義できる．[20,21] つまり，図1で模式的に表したように，誤差を推定量の分散と量子揺らぎの差として定義する．なお，この測定誤差は，A に対応する射影測定の場合にはゼロとなる．

最尤推定量の分散は，以下のように

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}[A^{\mathrm{MLE}}]=\boldsymbol{a}\cdot J(\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{a} \tag{16}$$

と求めることができる．[18] ここで，ベクトル $\boldsymbol{a}$ は，例えば測りたいスピンの向きのように，物理量 A を特徴付けるパ

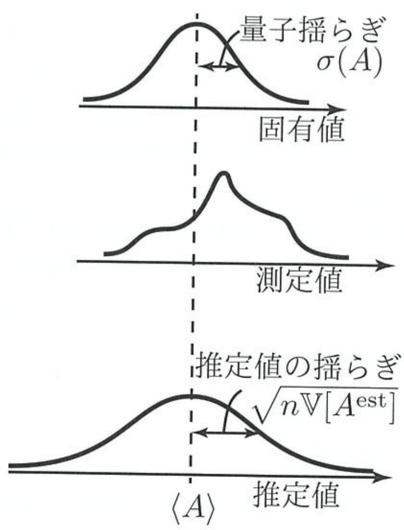


図1　量子推定の考え方を表す模式図．物理量 A は一般に系に固有の量子揺らぎ $\sigma(A)$ を持つ（上段）．A の測定値には一般には様々なノイズが含まれており，そのままでは知りたい物理量の期待値 $\langle A\rangle$ についての情報が得られない（中段）．量子推定理論により不偏推定量や一致推定量（本文参照）を構成することで，$\langle A\rangle$ についての情報が得られる（下段）．測定が誤差を含む場合には，推定値の分布の幅 $\sqrt{n\mathbb{V}[A^{\mathrm{est}}]}$ は物理量そのものの量子揺らぎ $\sigma(A)$ より増加し，両者の差が測定誤差を特徴付ける．文献20より引用．

ラメータであり，量子状態を特徴付けるベクトル$\boldsymbol{\theta}$（例えば，系のスピンの向き）を用いて$a_i:=\partial\langle A\rangle/\partial\theta_i$で与えられる．また，$J(\boldsymbol{K})$はフィッシャー情報量（フィッシャー情報行列）と呼ばれ，

$$[J(\boldsymbol{K})]_{jk}:=\sum_i \frac{\partial \log p_i}{\partial\theta_j}\frac{\partial \log p_i}{\partial\theta_k}p_i \quad (17)$$

と定義される．フィッシャー情報量$J(\boldsymbol{K})$はラベルの付け替えなどの可逆なデータ処理では不変であるが，一般の情報処理過程（マルコフ写像）に対しては単調減少する．これが$J(\boldsymbol{K})$が情報量と呼ばれる所以である．また，式(17)はパラメータ$\boldsymbol{\theta}$がわずかに変化した際の確率分布の変化を表しており，確率分布空間（統計多様体）の計量となっている．物理的には，量子状態がわずかに変化した際に確率分布$\{p_i\}$がどれだけ変化するかを表しており，測定の感度を表すものと解釈できる．

最尤推定量の分散はフィッシャー情報量を用いて表せるが，他方，量子揺らぎは，

$$\sigma(A)^2=\boldsymbol{a}\cdot J_Q^{-1}\boldsymbol{a} \quad (18)$$

と書き直すことができる．ここで，J_Qは量子フィッシャー情報量，特に対称対数微分（Symmetric Logarithmic Derivative; SLD）フィッシャー情報量と呼ばれ，

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\rho=\frac{1}{2}(\rho L_j+L_j\rho) \quad (19)$$

の解として定義される演算子$\{L_j\}$を用いて，

$$[J_Q]_{jk}:=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\rho(L_jL_k+L_kL_j)] \quad (20)$$

と定義される．演算子L_jは古典フィッシャー情報量に現れる量$\partial\log p_j/\partial\theta_j$の量子版であると解釈できる．また古典フィッシャー情報量の単調性に対応した性質として，量子フィッシャー情報量はユニタリ操作に関して不変であり，一般の量子ダイナミクスに関して単調減少する．

古典フィッシャー情報量は確率分布から定義されるため測定$\boldsymbol{K}$に依存しているのに対し，量子フィッシャー情報量は量子状態だけから定まる．量子と古典のフィッシャー情報量の間には，量子クラメル・ラオ不等式と呼ばれる不等式$J_Q\geq J(\boldsymbol{K})$が成り立つ．[19] これは，系に内在している情報量以上の情報を測定によって得ることができないことを意味し，それらの差は測定が射影測定からずれて誤差を含むために生じるものと解釈できる．式(15)で定義された測定誤差は以下のように情報論的に捉えられる．

$$\varepsilon(A;\boldsymbol{K})=\boldsymbol{a}\cdot[J(\boldsymbol{K})^{-1}-J_Q^{-1}]\boldsymbol{a} \quad (21)$$

これは，量子状態ρについての情報をどれだけ測定結果という古典的な量として取り出せたかを表している．

測定過程による状態変化$\rho\mapsto\rho'$（式(11)参照）は，測定の反作用の影響でユニタリではなく，かつ非可逆になる．このとき，系の持つ情報量は減少するため，系の持つ量子フィッシャー情報量の変化は測定の反作用の非可逆性を特徴付けるものとなる．そこで，我々は，測定過程$\boldsymbol{K}$による物理量Bへの擾乱を測定の反作用によって失われた量子フィッシャー情報量

$$\eta(B;\boldsymbol{K}):=\boldsymbol{b}\cdot[J_{Q,\boldsymbol{K}}^{-1}-J_Q^{-1}]\boldsymbol{b} \quad (22)$$

として定義した．[21,22] ここで，$J_{Q,\boldsymbol{K}}$は，測定後の量子状態ρ'から計算される量子フィッシャー情報量である．$\eta(B;\boldsymbol{K})$は，操作論的には測定後の状態ρ'から$\langle B\rangle$を推定した際の推定量の分散と初期状態ρにおけるBの量子揺らぎの差

$$\eta(B;\boldsymbol{K})=\lim_{n\to\infty}n\mathbb{V}[B^{\mathrm{MLE}}]-\sigma(B)^2 \quad (23)$$

として表すことができる．この擾乱は，測定過程がBに対して反作用を及ぼさない場合，すなわちユニタリな過程やBについての射影測定の場合にゼロとなる．

3. 誤差と擾乱のトレードオフ関係

ここまでで定式化した誤差$\varepsilon(A;\boldsymbol{K})$と擾乱$\eta(B;\boldsymbol{K})$の間に，我々は次のトレードオフ関係が成り立つことを示した．[21,22]

定理1. 任意の有限次元ヒルベルト空間において，全ての量子状態$\rho>0$，物理量A, Bの組に対して，任意の量子測定過程$\boldsymbol{K}$は以下の不等式を満たす．

$$\varepsilon(A;\boldsymbol{K})\eta(B;\boldsymbol{K})\geq\frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 \quad (24)$$

この不等式は，どのような量子測定を行っても，誤差と擾乱の積は交換関係を下回ることはできないことを示している．このことは，小澤が導入した誤差と擾乱が$\varepsilon_{\mathrm{O}}(A)\eta_{\mathrm{O}}(B)<|\langle[A,B]\rangle|/2$を満足する場合でも，交換関係を超えて物理的に有意な情報が得られることはなく，したがって，互いに非可換な物理量は交換関係による制約を超えた精度では推定できないことを意味している．

しかしながら，この不等式(24)の下限を達成する測定は一般には存在しない．例えば，$\rho=I/d$（dはヒルベルト空間の次元）の場合，交換関係はゼロとなるが，左辺をゼロにすることはできない．したがって，不等式(24)よりも強い不等式が存在するはずであり，それに答えるのが次の定理である．

定理2. 2次元ヒルベルト空間において，全ての量子状態$\rho>0$，物理量A, Bの組に対して，任意の量子測定過程$\boldsymbol{K}$は

$$\varepsilon(A;\boldsymbol{K})\eta(B;\boldsymbol{K})\geq\sigma(A)^2\sigma(B)^2-\mathcal{C}(A,B)^2 \quad (25)$$

を満たし，かつ，等号を達成する測定が全ての(ρ, A, B)の組に対して存在する．

ここで，$\mathcal{C}(A,B):=\langle AB+BA\rangle/2-\langle A\rangle\langle B\rangle$は物理量$A, B$の対称化相関である．2つの物理量の間には一般には相関が存在するため，揺らぎの積からその部分を差し引いた量

が誤差と擾乱の積の下限を与えると解釈できる．この下限はシュレーディンガーの不等式[23]によって交換関係よりも大きいことが知られている．

$$\sigma(A)^2\sigma(B)^2-C(A,B)^2\geq\frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 \tag{26}$$

なお，不等式(25)は$p=I/2$の場合については文献24, 25によって示された．定理2は2次元ヒルベルト空間に対してのみ証明が成されているが，高次元のヒルベルト空間についても，物理量AとBが同時ブロック対角化できない場合には不等式(25)が満足されることが数値的には確認されており，定理2の高次元への一般化ができるのではないかと期待される．

4. おわりに

我々は互いに非可換な物理量の期待値の推定問題という観点から不確定性関係を定式化した．量子論は本質的に確率的であることから，その測定結果からどのようにして有意な情報を取り出せるかを考える必要がある．そのような問題に対して答えを与えるのが量子推定理論であり，不確定性関係以外にも様々な応用が期待される．

本稿のはじめに不確定性関係は大きく二種類に分けられることを述べた．一つは共役な物理量へ擾乱無しに物理量を精度よく測ることはできないという測定の相補性，もう一つはケナード・ロバートソンの不等式やシュレーディンガーの不等式に代表される量子状態の非決定性である．我々が示したトレードオフ関係(25)と，シュレーディンガーの不等式(26)を並べてみると，

$$\begin{aligned}\varepsilon(A;\boldsymbol{K})\eta(B;\boldsymbol{K})&\geq\sigma(A)^2\sigma(B)^2-C(A,B)^2\\&\geq\frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2\end{aligned} \tag{27}$$

となり，測定の相補性と状態の非決定性，および，交換関係の間に階層構造があることが見て取れる．こうして，量子推定を量子測定理論に組み合わせることによって測定の相補性が数学的な不等式として定式化された．これは量子論的実在が確率的な測定結果（からの推定）を通じて発現する[6]というボーアの思想を具現化したものと言えよう．

参考文献

1) E. H. Kennard: Z. Phys. A **44** (1927) 326.
2) H. P. Robertson: Phys. Rev. **34** (1929) 163.
3) W. Heisenberg: Z. Phys. A **43** (1927) 172.
4) A. S. Holevo: *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
5) M. Hayashi: *Quantum Information: An Introduction* (Springer Verlag, 2006).
6) N. Bohr: Phys. Rev. **48** (1935) 696.
7) E. Arthurs and M. S. Goodman: Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 2447.
8) M. Ozawa: Phys. Rev. A **67** (2003) 042105.
9) J. Erhart, *et al.*: Nature Physics **8** (2012) 185.
10) S.-Y. Baek, *et al.*: Scientific Reports 3 (2013) 2221.
11) M. Kitano: arXiv: 0803.4377 (2008).
12) 松岡正浩：『量子光学』(裳華房，2000).
13) M. A. Nielsen and I. L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).
14) H. M. Wiseman and G. J. Milburn: *Quantum Measurement and Control* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010).
15) C. W. Gardiner and P. Zoller: *Quantum Noise* (Springer Verlag, 2004).
16) K. Kraus: Ann. Phys. **64** (1971) 311.
17) E. Lehmann and G. Casella: *Theory of Point Estimation* (Springer Verlag, 1983).
18) H. Cramér: *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton Univ. Press, 1946).
19) S. L. Braunstein and C. M. Caves: Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 3439.
20) Y. Watanabe, T. Sagawa and M. Ueda: Phys. Rev. A **84** (2011) 042121.
21) Y. Watanabe: *Formulation of Uncertainty Relation between Error and Disturbance in Quantum Measurement by Using Quantum Estimation Theory* (Springer, 2014).
22) Y. Watanabe and M. Ueda: arXiv: 1106.2526 (2011).
23) E. Schrödinger: Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Sect. **XIX** (1930) 293.
24) Y. Kurotani, T. Sagawa and M. Ueda: Phys. Rev. A **76** (2007) 022325.
25) T. Sagawa and M. Ueda: Phys. Rev. A **77** (2008) 012313.

(2014年10月2日原稿受付)

Formulation of Uncertainty Relation by using Quantum Estimation Theory

Yu Watanabe and Masahito Ueda

abstract: We formulate error and disturbance in quantum measurement in terms of the classical Fisher information and the quantum Fisher information. The error formulated here characterizes the accuracy of the estimate of the expectation value of an observable. The disturbance characterizes the irreversibility of the measurement process. We show that the product of the error and disturbance is bounded from below by the commutator of the observables. We also find the attainable bound of the product.