TUTORIAL
SERIES

量子光学と新技術(VII)

講座

山本喜久 上田正仁

山本喜久：正員 NTT 基礎研究所
上田正仁： 同上

Quantum Optics and New Technology [VII]. By Yoshihisa YAMAMOTO, Member and Masahito UEDA, Nonmember (NTT Basic Research Laboratories, Musashino-shi 〒180).

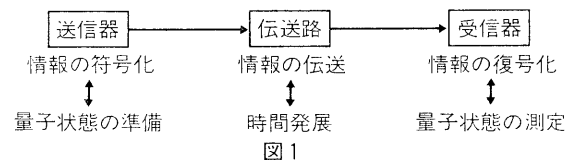
本章では、量子力学と情報の関係について述べる。前章で述べたように、量子力学が取り扱うのは、対象に対して観測者がもっている知識ともいべき状態と観測の結果とだけであって、実在などというものは考えてはいけない、というのがコペンハーゲン学派の解釈であった。従って、情報という概念は量子力学にとって本質的である。また、量子力学は不確定性原理を通して情報の伝送（通信）と処理（コンピューティング）に究極的な限界を与えるかもしれない。ここでは、量子雑音を取り入れた伝送路容量、1ビットの情報を運ぶ最小のエネルギー、時間とエネルギーの間の不確定性関係など量子力学的通信容量に関連した話題を議論する。また、量子非破壊測定における波束の収縮、可逆論理コンピュータ、マクスウェルの悪魔（シラーのエンジン）、シュレディンガーの猫のパラドクスを例に取り上げて、情報の消失と観測

による波束の収縮とエネルギーの散逸の関係について言及する。

1. 量子力学的通信容量

1.1 量子力学における観測過程と通信

量子力学の観測理論では、まずシステムの初期状態 ρ_i が与えられる。それがあるハミルトニアンに従って時間発展し、終状態 ρ_f となる。最後に測定器において、システムのある観測量 \hat{A} が測定され、 \hat{A} の固有状態の一つ $\hat{\rho} = |A\rangle\langle A|$ に波束が収縮する。この量子状態の準備、時間発展、測定のプロセスは、図1に示すように、通信でいう送信器、伝送路、受信器の役割である情報の符号化、伝送、復合化にそれぞれ対応している。すなわち、システムの初期状態を ρ_i に設定するということは、通信系において、送信者は入力情報源に従ってある物理量を変調し、例えば光子数にその情報を対応させて乗せるが、受信者から見れば、送信者の意図はわからず、その確率統計的な情報しか持たないことに相当する。その知識の欠如は可能な信号状態の広がりを表しており、密度行列 ρ_i の意味をこのように理解することができる。次に、 ρ_i がハミルトニアンに従って時間発展し、一義的に ρ_f になるということは、通信系において、例えば光子数 n_i が送信されたとき光子数 n_j が受信される確率である伝送路行列



予 定 目 次

- [I] はじめに
量子力学の基礎 (I)—不確定性原理—
(6月号)
- [II] スクイズド状態と光子対 (7月号)
- [III] 量子非破壊測定 (8月号)
- [IV] 共振器量子電気力学 (9月号)
- [V] トンネル電流の量子化 (10月号)
- [VI] 量子力学の基礎 (II)—重ね合せの原理
と観測問題—(12月号)
- [VII] 量子力学と情報 (1月号)
- [VIII・完] 応用・結論 (2月号)

$\{P_{ij}\}$ が一義的に定義できることに対応している。最後に、光子数の測定を行って波束が $\hat{\rho}_j$ から $|n_j\rangle < n_j|$ に収縮するということは、受信信号が $|n_j\rangle$ であったという完全な知識を受信者が獲得することによって知識の欠如や可能な信号状態の広がりが消滅したことに相当する。

このように、量子力学の観測過程を通信システムに読みかえることにより、シャノンの通信容量（伝送路容量）の量子限界を計算することが可能となる⁽¹⁾⁻⁽³⁾。

1.2 量子状態と測定器に依存した通信容量

今、光子数状態という量子状態を用いて、その光子数に情報を乗せて、無損失伝送路を伝搬させ、光子数検波により情報を読み出す場合を考える。モード当りの平均信号光子数が n_s 、平均熱雑音光子数が n_{th} とすると、ボース粒子に対する熱力学的エントロピーが⁽⁴⁾,

$$H_{\max} = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(1+n) \quad (1)$$

と求まる。但し、 $n = n_s + n_{th}$ である。今、光子数検波を行って $n_s + n_{th}$ を確定できたとする。しかし、これにより n_s を確定できたことにはならない。なぜならば、熱雑音光子数による不確定さが残っているからである。この大きさは、残留エントロピー

$$H_{\text{res}} = n_{th} \ln \left(1 + \frac{1}{n_{th}}\right) + \ln(1+n_{th}) \quad (2)$$

として計算される。伝送可能な情報量を与える相互情報量 I は^{(5),(6)},

$$I \equiv H_{\max} - H_{\text{res}} \quad (3)$$

より大きくなることはない。ナイキストのサンプリング定理から、伝送路帯域 B に対して、独立した自由度（モード）の伝送速度は B で与えられる⁽⁷⁾。このナイキストモードとは

$$\frac{\sin(\pi Bt)}{(\pi Bt)} \quad (4)$$

なる時間波形を持ったパルスを、 $\tau = \frac{1}{B}$ ごとに遅延させたものとして定義される。結局、通信容量の上限は次式で与えられることになる⁽⁸⁾⁻⁽¹¹⁾。

$$C = B \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(\frac{1+n}{1+n_{th}}\right) - n_{th} \ln \left(1 + \frac{1}{n_{th}}\right) \right] \quad (5)$$

極低温 ($T \rightarrow 0$) の極限においても、図2に示すように式(5)は有限の通信容量を示す⁽¹²⁾。熱雑音も量子雑音もないのに、なぜ通信容量に限界が現れるのであろうか？それは、光子数が連続量ではなく離散的な値しかとらないためである。通信容量式(5)は伝送路に損失がない理想の場合に対するものであるが、損失がある場合には、具体的ないくつかの変調方式に対して通信容量が計算されている⁽¹³⁾。

それでは、連続的な値をとり得る直交位相振幅 \hat{a}_1 に情報を乗せたらどうであろう。この場合、直交位相振幅スクイズド状態とホモダイン検波器の組合せが、最大の通信容量を実現し⁽¹⁴⁾,

$$C = B \ln(1 + 2n_s) \quad (6)$$

となる。図2に示すように、これは光子数状態と光子数検波の組合せの場合より小さい⁽¹²⁾。 \hat{a}_1 は確かに連続的な値をとり得るが、[III]で述べたように、有限のエネルギーでは、 \hat{a}_1 の量子雑音を0にすることはできない。式(6)は、平均光子数 n_s が一定という条件下でスクイズングパラメータを最適化して通信容量を最大にした場合の結果である。

もしも、二つの直交位相振幅 \hat{a}_1 と \hat{a}_2 に情報を乗せて、これを同時に測定した場合にはどうであろうか？この場合、最適な量子状態と検出器はそれぞれコヒーレント状態と光ヘテロダイン検波器であり、通信容量は⁽¹⁴⁾

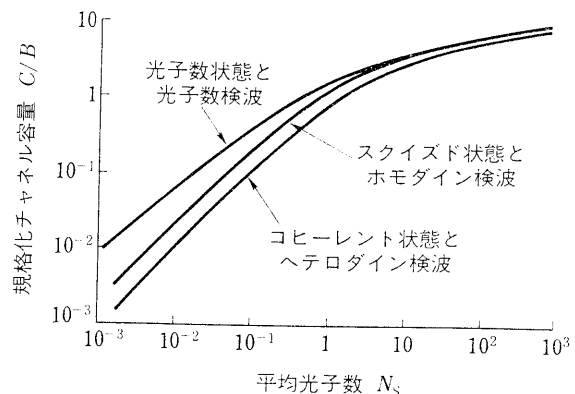


図2 規格化チャネル容量 C/B 対平均光子数 N_s

$$C = B \ln(1 + n_s) \quad (7)$$

となる。図2に示したように、二つの観測量を用いたにもかかわらず、式(6)より小さな通信容量しか得られない⁽¹²⁾。これは、コヒーレント状態が $\langle \Delta \hat{a}_1^2 \rangle = \langle \Delta \hat{a}_2^2 \rangle = \frac{1}{4}$ という有限の量子雑音を持っている以外に、〔I〕で述べたように \hat{a}_1 と \hat{a}_2 の同時測定が、 $3 \Delta B$ の付加雑音を常に加えるためである。

1.3 1ビットの情報を運ぶ最小エネルギー

光子一つで伝送可能な情報量は、通信容量 C をナイキストモードの伝送速度 B と平均光子数 n_s で割ることにより求められる。一光子によって伝送しうる情報量は、絶対零度では無限大になる。すなわち、1ビットを伝送するのに必要な光子数には量子力学的下限が存在しない。このことは、多値のパルス位置変調信号を考えてみれば理解できる。 M 個のスロットのどれか一つに一つの光子を割り当てた場合、この光子一つが運ぶ情報量は $\log_2 M$ ビットであり、 M を無限に大きくすれば、情報量も無限に大きくなる。

しかし、有限温度では、背景熱雑音のために、1ビットを伝送するために必要な光子数に下限が存在する。光子数状態と光子数検波に対しては、一光子で伝送しうる情報量の最大値は、平均光子数が0になる極限で得られ⁽¹⁵⁾

$$\frac{C}{B n_s} = \frac{\hbar \omega}{k_B T} \text{ (nat/photon)} \quad (8)$$

となる。この値は、 $T = 300 \text{ K}$ 、波長 $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$ に対しては、32 nat/photon (46 bit/photon) である。

このような極限においては、伝送帯域の利用効率 C/B は0に漸近し、十分な広帯域チャネルを用いても、極めて低速の伝送しか行えなくなる。一般に、エネルギーと帯域の間にはこのような取り引き関係がある。1ビットの情報を伝送するために信号光が持っていなければならない最小のエネルギーは、 $k_B T \ln 2$ となる。この値は、1ビットの情報を読み出すための最小のエネルギー散逸であると誤って認識されることがあるが、情報の読み出しとエネルギー散

逸の間に直接的関係のないことは量子非破壊測定⁽¹⁶⁾の原理からも明らかである。

直交位相振幅スクイズド状態とホモダイン検波に対しては、平均光子数 n_s が1のときに $C/B n_s$ の最大値が得られ、

$$\frac{C}{B n_s} = 2 \text{ (nat/photon)} \quad (9)$$

となる。また、コヒーレント状態とヘテロダイン検波に対しても、同様で、

$$\frac{C}{B n_s} = 1 \text{ (nat/photon)} \quad (10)$$

なる限界が現れる。式(8)が熱雑音限界であるのに対し、式(9)、(10)は量子雑音限界である。

1.4 時間とエネルギーの不確定性関係

1ビットの情報を伝送するのに必要なエネルギーは、光子数状態と光子数検波に対して、

$$E = \hbar \omega_0 n_s B \ln 2 / C \\ = \frac{\hbar \omega_0 \ln 2}{\ln \left(1 + \frac{1}{n_s}\right) + \frac{1}{n_s} \ln(1 + n_s)} \quad (11)$$

で与えられる。一方、1ビットの情報を伝送するのに必要な時間 T は、

$$T = \frac{\ln 2}{C} \\ = \frac{2 \pi \ln 2}{\omega_0 \left[\ln(1 + n_s) + n_s \ln \left(1 + \frac{1}{n_s}\right) \right]} \quad (12)$$

となる。ここで、伝送路帯域として、その最大値 $B = \omega_0 / 2 \pi$ を仮定した。図3に ET 積の n_s 依存性を示す。 $n_s = 1$ 付近で ET 積は最小値 $\frac{\hbar}{2}$ をとることがわかる⁽¹⁶⁾。

ポーアの不確定性関係とよばれる次のエネルギーと時間の分散に関する関係

$$\Delta E \Delta T \geq \frac{\hbar}{2} \quad (13)$$

は、長い間量子力学において論争的になってきたものである⁽¹⁷⁾。式(13)の一つの解釈は、あるシステムのエネルギーの広がり ΔE とそのシステムの観測量が変化する時間(寿命) ΔT の間に成立する関係式というものである。しかし、上に示したように、それはシステムの

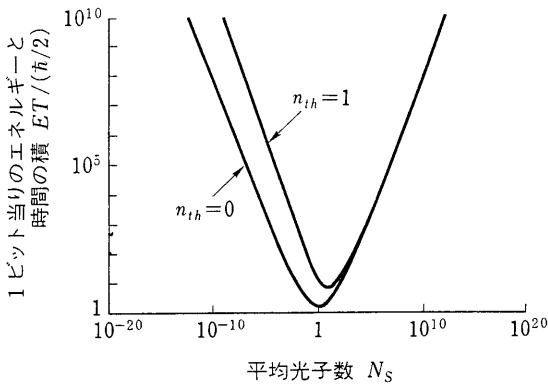


図3 1ビット当りのエネルギー・時間積 $ET/(\frac{\hbar}{2})$ 対平均光子数 N_s

もつエネルギーとそれを正確に測定するために必要な観測時間の積と解釈することもできる。

2. 情報の消失が持つ意味

2.1 量子非破壊測定における波束の収縮

光子数の量子非破壊測定装置（本講座 [III] の図2）において、プローブ光の位相変化を厳密に測定できたとすると、この測定の結果、信号光は光子数状態に波束が収縮する。一方、プローブ光の位相変化を測定する代わりに、プローブ光の光子数を厳密に測定したとすると、信号光はコヒーレント状態に波束が収縮する。この様子を図4に示す。初めコヒーレント状態にあった信号光は、相互位相変調後には、その簡約された密度行列 $\hat{\rho}_S^{red} = \text{Tr}_P(\hat{\rho}_{SP})$ を見る限り、量子コヒーレンスが消失し、光子数状態の混合状態に波束が収縮しているかのように見えるが、実は、プローブ光の光子数情報の中に、その乱された位相情報が残されていたのである。しかし、光子数の量子非破壊測定を行うためには、プローブ光の位相情報を読み出さなければならず、このためには、位相の共役観測量である光子数の情報は不確定性原理の要請から捨てざるを得ない。こうして、信号光の量子コヒーレンスに関する情報が消失し、光子数状態もしくはその混合状態への波束の収縮が起るのである。

一般に、波束の収縮という非可逆過程は、多数自由度系（巨視的測定器）への結合（散逸）に伴う、このいわば熱浴からの揺動の結果とし

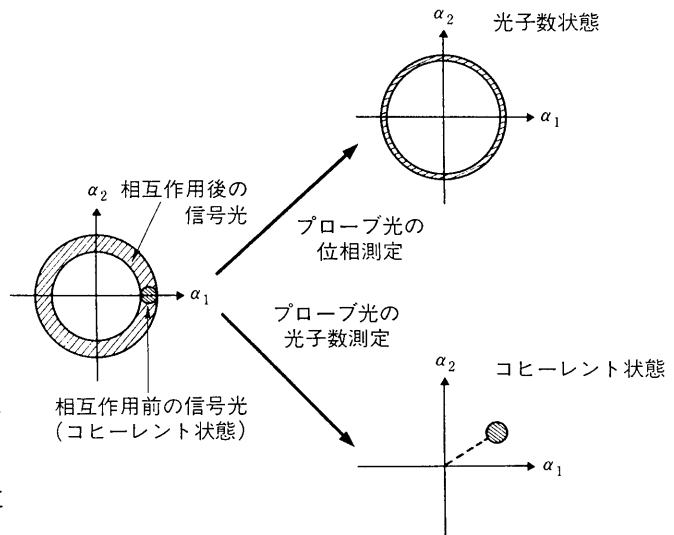


図4 量子非破壊測定における波束の収縮

て説明されるが^{(18),(19)}、問題の本質は、むしろ、システムの観測量 A の情報をプローブの観測量 a を通して読み出す→プローブの共役観測量 b の情報が失われる→ b に保存されていたシステムの共役観測量 B への測定による反作用雑音の情報も失われる→システムの量子コヒーレンスの消失、という連鎖が波束の収縮に至る問題の本質である。

2.2 可逆論理コンピュータ

情報処理における究極のエネルギー散逸（熱発生）に関して、1ビット当り $k_B T \ln 2$ という熱力学的限界や演算時間 τ 当り $\frac{\hbar}{2\tau}$ という量子力学的限界が示唆されている⁽²⁰⁾。例えば、図5(a)に示すような、ANDゲートを考えると、入力には四つの状態が可能であるが、出力では二つの状態しか存在し得ない。従って、論理演算の前後で情報量が減少し ($\ln 4 - \ln 2 = \ln 2$)、熱平衡状態にある論理素子自体のエントロピーの増大分 ($k_B T \ln 2$) だけのエネルギー散逸は避けられない、というものである。この場合、論理の不可逆性とそれに伴うエネルギー散逸の原因は、計算に不必要な情報を消去したことによっている。

不必要な「ゴミ情報」を消去せずに、可逆性を保存する論理素子はいくつか提案されている⁽²¹⁾⁻⁽²³⁾。図5(b)に示したフレッドキンゲートもその一つで、制御信号の0, 1に対応して、

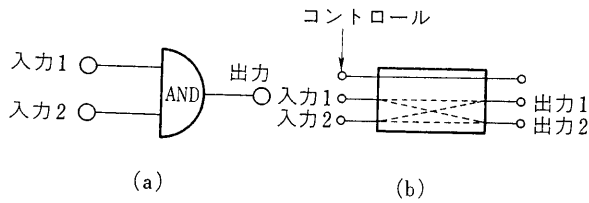


図5 非可逆な AND ゲートと可逆な Fredkin ゲート

2 入力をスイッチしたり，しなかったりして出力する単純なものであるが，AND，OR，NOT，COPY といった演算を可逆性を保存したまま実行できる⁽²¹⁾． $k_B T \ln 2$ や $\frac{\hbar}{2\tau}$ は 1 ビットの情報を処理するために信号が持っていなければならない熱力学的，量子力学的な最小のエネルギーであって，情報の処理とエネルギー散逸の間に直接的関係のないことは，この可逆論理コンピュータの存在からも明らかである．

このようなフレッドキンゲートを，光子数状態と非線形素子（または原子一つ）のコヒーレント相互作用で実現する構想も提案されている^{(16), (24)}．また，論理的非可逆性（情報の消失）とエネルギー散逸が必ずしも同値でないことが，ジョセフソンパラメトロン計算機を例として，最近，議論されている⁽²⁵⁾．

2.3 マクスウェルの悪魔

マクスウェルの悪魔は，二つのシリンダの間を行き来する原子の速度に応じて，シャッタを開閉し，外部から仕事をせずにシリンダ A の温度を B のそれより高くすることができ，外部に対して仕事をする．このシラーのエンジンとして知られている永久熱機関は，熱力学の第 2 法則に矛盾する⁽²⁶⁾．ブリルアン⁽⁶⁾は，マクスウェルの悪魔が，背景熱雑音に対して十分な信号対雑音比で原子を見ることができるとは，最低 $k_B T \ln 2$ のエネルギーを持った光子を使わなければならない，この光子のエネルギーを消費することにより，熱力学の第 2 法則が守られる，と指摘して，この悪魔を取り払った．これは，情報と熱力学的エントロピーを関係づける好例としてしばしば引用されている．

しかし，原子の測定からシャッタの開閉までを，エネルギー散逸を伴わないユニタリ過程で実行することは少なくとも思考実験の範囲内で

は可能なことである．最近，ベネットは，エネルギー散逸はシステムを初期状態に戻す過程，すなわち，測定で得られた情報を消去して，メモリをクリアするときに発生することを示し，悪魔払いにおいても情報の消去が重要な意味を持っていることを明らかにした⁽²⁷⁾．

2.4 シュレディンガーの猫状態

巨視的レベルで分離された二つの量子状態が線形に重ね合された状態は，現実には存在しない．すなわち，一つの原子が上準位と下準位にまたがって，その線形結合の状態にあることは可能であるが，1 匹の猫が生きている状態と死んでいる状態の両者にまたがって存在することはない．

どのような理由で，重ね合せの原理が微視的系では成立するのに，巨視的系で破綻するのかを調べるため，このようなシュレディンガーの猫状態を量子光学の手法により発生し，検出することが検討されている⁽²⁸⁾．図 6 には，コヒーレント状態を光カー媒質中に通すことによって作り出された，二つのコヒーレント状態の線形な重ね合せの状態が示されている⁽²⁸⁾．一つの直交位相成分 \hat{a}_1 の光ホモダイン検波を行うと，どちらかのコヒーレント状態（生きている状態か死んでいる状態か）が出力される．その統計は，図示したようにガウス分布になる．この結果だけでは，初期状態が，二つのコヒーレント状態の線形な重ね合せの状態にあったのか，単なる混合状態にあったのかはわからない．しかし，他の直交位相成分 \hat{a}_2 の光ホモダイン検波を行うと，図示したように二つのコヒーレント

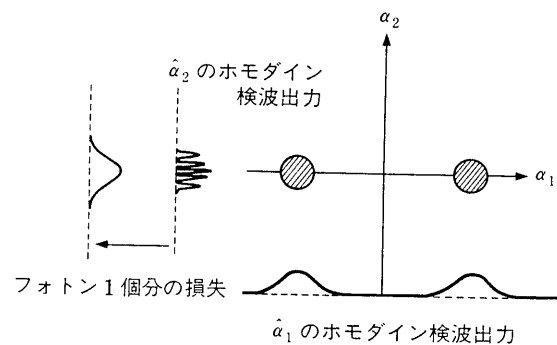


図6 巨視的に分離された二つのコヒーレント状態の重ね合せ状態（シュレディンガーの猫状態）

状態の量子干渉による変調が現れる。これが、初期状態が混合状態でなく、重ね合せ状態にあったこと（初期状態は生きている状態と死んでいる状態の両方にまたがって存在していたこと）の証拠となる。

しかしながら、このようなシュレディンガーの猫状態は、極わずかの損失に合うと、瞬く間に混合状態に移行してしまう。損失により、平均して光子一つだけ失われると、図6に示したように量子干渉は完全に消えてしまう⁽²⁸⁾。これは、失われた光子一つに対して、光ホモダイン検波を行って、初期状態がどちらであったかを知ることができるからである。それは、量子コヒーレンスに関する情報を完全に消失してしまったことに相当している。巨視的系になれば、平均光子数一つを失う損失の量は極めて小さくなり、極わずかの散逸によって量子コヒーレンスは消失してしまう。これが、巨視的レベルでシュレディンガーの猫状態が存在できない理由である。

3. 結 論

量子力学と情報理論の結合は、通信理論の分野において大きな成功を収めた。背景には、レーザーの発明以後の光通信技術の急速な発展があった。しかし、情報処理（コンピューティング）の分野における量子力学と情報理論の研究はまだ緒についたばかりである。今後、コンピューティングのハードウェア本体が微視的な量子系により構成されるようになると、量子力学における観測の問題や情報理論との接点に、また大きな進展が見られるようになるかもしれない。

文 献

- (1) C. W. Helstrom : Quantum Detection and Estimation Theory, Academic, New York (1976).
- (2) 梅垣, 大矢 : “量子論的エントロピー”, 共立出版 (昭59).
- (3) 広田 : “光通信理論—量子論的基礎—”, 森北出版 (昭60).
- (4) L. D. Landau and E. M. Lifshitz : Statistical Physics, Pergamon London/Paris(1959).
- (5) C. H. Shannon and W. Weaver : “The Mathematical Theory of Communication”, University of Illinois Press, Urbana(1949).

- (6) L. Brillouin : Science and Information Theory, Academic, New York(1965).
- (7) H. Nyquist : AIEE Trans., 47, 617 (1928).
- (8) T. E. Stern : IEEE Trans. Inform. Theory, IT-6, 435 (1960).
- (9) J. P. Gordon : Proc. IRE, 50, 1898 (1962).
- (10) D. S. Levedev and L. B. Levitan : Sov. Phys. Dokl., 8, 377(1963).
- (11) H. Takahashi : in Adv. Commun. System, Academic, New York(1965).
- (12) Y. Yamamoto and H. A. Haus : Rev. Mod. Phys., 58, 1001(1986).
- (13) F. Kanaya and K. Nakagawa, Trans. IECE, E 71, 1116(1988).
- (14) H. P. Yuen : Proc. of 1975 Johns Hopkins Conference on Information Science and Systems(1975).
- (15) J. R. Pierce, E. D. Posner and E. R. Rodemich : IEEE Trans. Inform. Theory, IT-27, 61(1981).
- (16) 井桁 : 信学技報, OQE 87-75 (1987); Y. Yamamoto, M. Kitagawa and K. Igeta : Proc. Third Asia-Pacific Phys. Conf., p.779 (World Scientific, 1988).
- (17) E. P. Wigner : in Aspects of Quantum Theory, ed. by A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge University Press, London(1972).
- (18) S. Machida and M. Namiki : Prog. Theor. Phys., 63, 1457 (1980); H. Araki : Prog. Theor. Phys., 64, 719 (1980).
- (19) W. H. Zurek : Phys. Rev., D 24, 1516(1981).
- (20) J. von Neumann : Fourth University of Illinois Lecture, in Theory of Self-reproducing Automata, A. W. Burkes, ed. (Univ. of Illinois Press, 1966).
- (21) E. Fredkin and T. Toffoli : Int. J. Theor. Phys., 21, 905(1982).
- (22) R. P. Feynman : Opt. News, 11, 11(1985).
- (23) C. H. Bennett and R. Landauer : Sci. Am., 1, 48 (1985).
- (24) G. Milburn : Phys. Rev. Lett., 62, 2124(1989).
- (25) E. Goto : Third Int. Symp. Found. Quantum Mechanics (Aug. 1989).
- (26) L. Szilard : Z. Physik, 53, 840 (1929).
- (27) C. H. Bennett : Scientific American, 11, 88(1987).
- (28) B. Yurke and D. Stoler : Phys. Rev. Lett., 57, 13 (1986).

山本 喜久 (正員)

昭48 東工大・工・電気卒。昭53 東大大学院博士課程了。同年日本電信電話公社入社。以来、コヒーレント光通信、レーザー増幅器、レーザーの量子雑音、量子光学の研究に従事。現在、NTT 基礎研究所情報科学研究部山本グループリーダー。工博。昭56 年度学術奨励賞、昭60 年度業績賞受賞。著書「Semiconductors and Semimetals」など。



上田 正仁

昭61 東大・理・物理卒。昭63 同大大学院修士課程了。同年日本電信電話(株)入社。以来、微小接合素子の量子論の研究、量子光通信の研究に従事。現在、NTT 基礎研究所情報科学研究部山本グループに所属。

