物理数学３ (上田正仁) 期末試験 (試験時間：105 分)

2016/1/25

- 問題 1 から問題 4 全てに解答せよ。問題に不備、条件不十分な点等があると思われる場合は、どの点をどのように修正、解釈したかを明記した上で、その修正、解釈の下で解け。
- 解答用紙は 2 枚である。**うち 1 枚については表面に問題 1、裏面に問題 2 の解答を記述し、もう 1 枚については表面に問題 3、裏面に問題 4 と問題 5 の解答を記述すること。**
- 遅刻は試験開始後 30 分まで認める。試験開始後 30 分以降であれば、答案を提出して退室してよい。

問題 1

$\mathrm{O}(1,1)$ は空間を 1 次元に制限したローレンツ群であり、ミンコフスキー計量 g を不変にする行列からなる：

$$\mathrm{O}(1,1) = \{M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \mid M^T g M = g\}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

(1) $\mathrm{O}(1,1)$ のリー代数は $e^{itX} \in \mathrm{O}(1,1)$ となる X により生成される。このリー代数は 1 次元となることを証明し、その生成元 X を 1 つ求めよ。

(2) 行列 e^{itX} の動く範囲を求め、$\mathrm{O}(1,1)$ がコンパクトでないことを確認せよ。

(3) $\mathrm{O}(1,1)$ はいくつの連結成分をもつか答えよ。

問題 2

平面 $\mathbb{R}^2$ の自然な座標を (x,y) で与える。$k \neq 0$ に対して次のような座標変換を考える：

$$(z_1, z_2) = (x + ky, x - ky). \tag{2.1}$$

(1) 接ベクトル $\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}$ を x, y を用いて表せ（答のみでよい）。

(2) S を $\mathbb{R}^2$ の円板領域とし、∂S を S を反時計周りに囲む円周とする。$g(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ で定義された C^1 級関数とするとき、

$$\int_{\partial S} g dz_1 = c_k \iint_S \frac{\partial g}{\partial z_2} dx \wedge dy \tag{2.2}$$

を満たす c_k が S および g のとり方によらず定まることを示し、その値を求めよ。

さて、ここで虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を用いる。(2.1) において $k = i$ とした式を用い、

$$(z, \bar{z}) = (x + iy, x - iy) \tag{2.3}$$

と定める。$(z, \bar{z})$ は $\mathbb{R}^2$ 上の座標とはならないが、式 (2.2) は $k = i$ としても同様に成立する。

(3) f を複素平面全体で定義された C^1 級の複素関数とする。複素平面上の任意の C^1 級閉曲線 C に対して $\int_C f(z)dz = 0$ となるならば、f は正則関数となること（モレラの定理）を証明せよ。

問題 3

ホッジスター $*$ は、向きの付いた n 次元リーマン多様体 M 上の微分形式に対して定義される。このような多様体は、適切な局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を取ることで、余接空間 $T_p^*(M)$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ および M の体積要素 dV が

$$\langle dx^i, dx^j \rangle = \delta^{ij}, \qquad dV = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{3.1}$$

で与えられる。以後、$(x^1, \ldots, x^n)$ はこのような座標系とする。

M 上の k-形式に対して余微分 δ とラプラシアン Δ が

$$*(\delta\omega) = (-1)^k d(*\omega) \tag{3.2}$$

$$\Delta = -(\delta d + d\delta) \tag{3.3}$$

と定義される。このとき、次の事実を示せ。簡単のため、3 次元であること $(n = 3)$ を仮定してもよい：

(1) k-形式 ω に対して、$\delta\delta\omega = 0$ であること。
(2) k-形式 ω に対して、$d\Delta\omega = \Delta d\omega$, $\delta\Delta\omega = \Delta\delta\omega$ が成立すること。
(3) 0-形式 f に対して、$\delta f = 0$ となること。
(4) 1-形式 $\alpha = g_i dx^i$ に対して、$\delta\alpha = -\dfrac{\partial g_i}{\partial x^i}$ であること。
(5) 0-形式 f に対して、$\Delta f = \displaystyle\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial (x^j)^2}$ が成立すること。

補足：(1)(2) は一般の k について示すこと。(4) は添え字 i に関する和をとる。

問題 4

3 次元空間から原点のみを除いた空間を X とする：

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}. \tag{4.1}$$

X 上の 2-形式 ω を

$$\frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{4.2}$$

で定める。

(1) 閉形式と完全形式の定義を述べ、完全形式が閉形式となることを説明せよ。
(2) ω が閉であることを証明せよ。
(3) 原点を中心とする半径 1 の球面を S としたとき、$\int_S \omega$ を求めよ。ただし、S の法線ベクトルは外向きとする。
(4) ω が完全でないことを証明せよ。

問題 5 (授業に関して)

授業に関して率直かつ建設的な意見を述べてください（この部分は成績評価には影響しません)。