物理数学 3　homework 2

2015/10/19

問題 1 (シューアの補題の応用)

G を有限群とし, D を G の n 次元既約表現とする。

(1) A を n 次正方行列とするとき,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} D(g)AD(g^{-1}) = \frac{1}{n}(\mathrm{Tr}\,A)I$$

となることを示せ。

(2) 正の定数 c が存在して

$$\sum_{g\in G}\big(\mathrm{Tr}\,D(g)\big)D(g^{-1}) = cI$$

となることを示せ (ヒント：D はユニタリ表現に相似である)。

(3) n 次正方行列 A が、すべての $g \in G$ に対して $\mathrm{Tr}\,D(g)A = 0$ を満たすとする。このとき $A = 0$ を示せ。

問題 2 (二面体群)

二面体群 D_n は $\rho^n = \tau^2 = 1, \tau\rho = \rho^{-1}\tau$ を満たす ρ, τ で生成される群である。D_n の位数は $2n$ であり, 以下のように表せる：

$$D_n = \{\rho^a\tau^b \mid 0 \le a \le n-1,\, b = 0, 1\}.$$

D_n は正 n 角形を不変にする合同変換を抽象化した群であり、σ は $1/n$ 回転, τ は鏡映に対応している。

D_n の表現論は n が偶数の場合と奇数の場合に大別して議論することができる。今回は n が偶数の場合を考え、代表例として D_6 の表現を調べよう。

(1) D_6 の共役類をすべて求めよ (答のみでよい)。

(2) D_6 の 1 次元表現 4 つをすべて決定せよ。なお、表現 R を記述するためには, 生成元の移り先 $R(\rho), R(\tau)$ を指定すればよい。

(3) D_6 の残りの既約表現が 2 個であり, それらはすべて 2 次元であることを導け。

D_6 の 1 次元表現は, しばしば A_1, A_2, B_1, B_2 と記述されるものである (マリケン記号)。一方、D_6 の 2 次元既約表現は、いずれも σ を回転, τ を鏡映に対応させるものである。σ が $1/6$ 回転となる方を E_1, $2/6$ 回転となる方を E_2 とする。

(4) E_1 と E_2 の指標を求め、D_6 の指標表を作成せよ。

(5) この指標表を用いて、E_1 および E_2 が既約であることを確かめよ。

(6) D_6 の 3 次元表現 T を

$$T(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める。これを既約表現に分解せよ。