物理数学 3　homework 8

2015/12/7

問題 1 (4 次元時空間における微分形式)
(x, y, z) で表される 3 次元空間における外微分 d_{sp} は、時間 t を取り入れた 4 次元時空間 (t, x, y, z) における外微分 d とは異なる。*1 具体的には、空間的な (dt 成分を持たない) 微分形式 ω に対して

$$d\omega = d_{\mathrm{sp}}\omega + dt \wedge \frac{\partial \omega}{\partial t} \tag{1.1}$$

となることが分かる。また、時空間における微分形式 ω は、

$$\omega = dt \wedge \omega' + \omega'' \tag{1.2}$$

により、空間的な微分形式 ω', ω'' に分解される。

(1) 電磁場テンソルは、時空間における 2-形式 ω_{em} として表される。これを

$$\omega_{em} = -dt \wedge \omega_e + \omega_b \tag{1.3}$$

に分解すると、ω_e, ω_b はそれぞれ電場 $\boldsymbol{E}$, 磁場 $\boldsymbol{B}$ に対応する。それぞれのベクトルは極性ベクトルか、あるいは軸性ベクトルか答えよ。

(2) 電磁場テンソルを外微分した 3-形式 $\eta = d\omega_{em}$ を

$$\eta = dt \wedge \eta' + \eta'' \tag{1.4}$$

と分解する。η', η'' を ω_e, ω_m を用いて表せ。

(3) 方程式 $d\omega_{em} = 0$ を $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ で表し、これがマクスウェル方程式の一部となることを確認せよ。

(4) 電磁ポテンシャルが定義できるとき、これは 1-形式

$$\omega_p = -\phi dt + \omega_a \tag{1.5}$$

として表され、方程式 $d\omega_p = \omega_{em}$ を満たす。ω_a に対応するベクトルを $\boldsymbol{A}$ として、$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ を $(\phi, \boldsymbol{A})$ により表せ。

次のページに続きます。

*1 第 11 章においても 4 次元時空間を取り扱うが、ここの表式とは Wick rotation $x^4 = ict$ の分だけ違いがある。

問題 2 (複素解析と微分形式)

平面 $\mathbb{R}^2$ の自然な座標を (x, y) で与える。$k \neq 0$ に対して次のような座標変換を考える：

$$(z_1, z_2) = (x + ky, x - ky) \tag{2.1}$$

(1) 接ベクトル $\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}$ を x, y を用いて表せ。

(2) S を $\mathbb{R}^2$ の有界領域[*2]とし、∂S を S を反時計周りに囲む曲線とする。$g(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ で定義された C^1 級関数とするとき、

$$\int_{\partial S} g dz_1 = c \iint_S \frac{\partial g}{\partial z_2} dxdy \tag{2.2}$$

を満たす c が S および g のとり方によらず定まることを示し、その値を求めよ。

さて、ここで虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を用いる。(2.1) において $k = i$ とした式を用い、

$$(z, \bar{z}) = (x + iy, x - iy). \tag{2.3}$$

と定める。$(z, \bar{z})$ は $\mathbb{R}^2$ 上の座標とはならないが、式 (2.2) は代数的な関係式に帰着できるので、$k = i$ としても同様に成立する。

(3) f を C^1 級の複素関数とする。任意の C^1 級閉曲線 C に対して $\int_C f(z)dz = 0$ となるならば、f は正則となることを証明せよ (モレラの定理)。

[*2] 厳密には、∂S が面積 0 となるような有界開集合。