物理数学 3　homework 9

2015/12/21

問題 1 (ホロノーム系)

状態が x で表されるような力学系を考え、一般化座標 $x = (x^1, \ldots, x^d)$ をとる。状態のとりうる軌道 $x = x(\tau)$ に対して

$$\sum_{a=1}^{d} f_a(x) \frac{dx^a}{d\tau} = 0 \tag{1.1}$$

という形の拘束条件（微分拘束）が課せられているとする。微分拘束は、1-形式 ω を用いて次のように書き直すことができる：

$$\left\langle \omega, \frac{dx}{d\tau} \right\rangle = 0, \qquad \omega(x) = \sum_{a=1}^{d} f_a(x) dx^a. \tag{1.2}$$

(1) ω が積分可能であるならば、微分拘束はスカラー関数 (ポテンシャル) ϕ を用いて $\frac{d}{d\tau}\phi(x) = 0$ と表せることを示せ。

このような、ポテンシャルの保存に置き換えられるような微分拘束をホロノーム系という。

(2) 3 次元空間内の質点の位置 (x, y, z) に対する微分拘束が

$$xdx + ydy + (2r - z)dz = 0 \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

で与えられるとき、これは（原点以外で）ホロノーム系であることを示し、保存量を 1 つ求めよ。

(3) (x, y, z) の微分拘束が

$$ydx - xdy + (2r - z)dz = 0 \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \tag{1.3}$$

となる力学系はホロノームではないことを示せ。

次のページに続きます。

問題 2 (ベリー位相)

スピン 1/2 の単一粒子に大きさ一定の磁場をかける。粒子の波動関数は 2 次元複素ベクトル $\psi = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ で表され、規格化条件 $|v|^2 + |w|^2 = 1$ を満たす。ハミルトニアンは磁場 $\boldsymbol{m} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \cos\theta)$ をパラメーターとしてもち、

$$H(\boldsymbol{m}) = H(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & e^{i\phi}\sin\theta \\ e^{-i\phi}\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

となる。

(1) $H(\boldsymbol{m})$ の基底状態の波動関数 $\psi = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ のうち、v が正となるものを $\psi_1(\boldsymbol{m})$, w が正となるものを $\psi_2(\boldsymbol{m})$ とする。$\psi_1(\boldsymbol{m}), \psi_2(\boldsymbol{m})$ を (定義される範囲において) θ, ϕ で表せ。

(2) $\psi(\boldsymbol{m})$ がつねに $H(\boldsymbol{m})$ の基底関数であるとすると、ψ は球面全体で連続写像となりえないことを説明せよ（ヒント：$\psi_1(\boldsymbol{m})$ および $\psi_2(\boldsymbol{m})$ との位相差を考える。ϕ を一周させたとき、この位相差はどうなるか？）。

磁場 $\boldsymbol{m}$ を、大きさを 1 に保ったまま準静的に変化させる。このとき、波動関数 ψ はエネルギー 0 の基底状態を保ちながら追随して変化する。$\psi = e^{i\chi}\psi_1(\boldsymbol{m})$ とすると[*1]、$\boldsymbol{m}$ が $\boldsymbol{m} + d\boldsymbol{m}$ に変化したときの位相差 $\delta\chi$ は 1-形式

$$i(\delta\chi) = \langle \psi_1, d\psi_1 \rangle \tag{2.2}$$

で求められる。これをベリー位相という。

(3) 1 形式 $\delta\chi$ を θ, ϕ で表せ。

(4) χ が θ および ϕ の関数として (局所的にであっても) 表せないことを示せ。

(5) 磁場 $\boldsymbol{m}$ を、球面上の閉曲線 C に沿って一周させる。このとき、波動関数 ψ の位相の変化量は、C が囲む球面上の領域の面積に等しいことを示せ。

[*1] $\boldsymbol{m}$ は ψ_1 が定義される範囲を動くものとする。