

物理数学 III 講義ノート

上田正仁

平成 27 年 11 月 30 日

はじめに

本講義の目的は、物理学に現れる対称性とトポロジを理解する第一歩として、また、特殊および一般相対性理論を理解するための数学的準備として、群論、リー群、微分幾何の基礎を教授することである。数学的な観点からこの問題を眺めることによって、リー群に対する理解が深まることを期待している。物理学が自然現象を記述する普遍的な学問であるゆえんは、見方（座標）によらない記述が可能だからである。そして、どの程度見方によらないかということは、どのようなクラスの変換に対して基礎方程式が不変（変換によって方程式の形を変えない）であるかということによって特徴づけられる。リー代数の言葉でいえば、見方とは特定の基底の基づく「表現」であり、見方によらない不変な性質がリー代数やリー群の対称性によって記述される。この対称性だけに依拠しているために、トポロジカルな性質は、対称性を破らない摂動の影響を受けないのである。

この講義ノートを作成する際に次の書籍を参考にした。

- 佐藤光 「物理数学特論 群と物理」丸善 (1992) 群の基礎概念とリー群を物理への応用例を紹介しながら解説した教科書。
- Howard Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Westview Press, 1999) 素粒子への応用を念頭に置いた教科書
- 窪田高弘 「リー群とリー代数」SGC ライブラリ 66 サイエンス社 リー群とリー代数に特化した物理の学生向けの教科書。
- 吉川圭二 「群と表現」(理工系の基礎数学 9) 岩波書店 群論とその表現論についての物理学者の視点から書かれた入門書。
- 岩堀長慶 「ベクトル解析」裳華房 ベクトル解析と微分形式の優れた入門書

目次

第 I 部	群論	9
第 1 章	群論の基礎	11
1.1	群の定義	11
1.2	部分群	12
1.3	正規部分群	12
1.4	中心化群、正規化群	12
1.5	置換群	13
1.6	商群	13
1.7	共役類	15
1.8	射	16
1.8.1	準同型写像	16
1.8.2	同型写像	16
1.8.3	自己同型	17
第 2 章	表現論	19
2.1	ベクトル空間	19
2.2	正則表現	22
2.3	既約表現	23
2.4	有限群の基本定理	25
2.5	シュアの補題	27
2.6	表現の直交性	29
2.7	指標	32
2.8	ヤング図	35
2.9	具体例—対称群 S_3	37
2.9.1	既約表現	37
2.9.2	指標	37
2.9.3	正則表現	39
2.9.4	ヤング図	39
第 3 章	リー群の基礎	43
3.1	線形変換群	43

3.1.1	ユニタリ群	44
3.1.2	直交群	45
3.1.3	シンプレクティック群	45
3.1.4	ローレンツ群	46
3.2	リー代数の一般的性質	47
3.2.1	リー群とリー代数の関係	47
3.2.2	構造定数	50
3.2.3	抽象リー代数	52
3.2.4	カルタン計量	52
3.2.5	不変部分代数	53
3.2.6	半単純リー代数、単純リー代数	54
3.2.7	キリング形式	55
3.2.8	リー代数の随伴表現	57
3.3	リー群の諸定理	62
第 4 章	リー群と多様体	65
4.1	位相空間 (topological space)	65
4.2	微分可能多様体	66
4.3	接空間	67
4.4	群上の不変積分	70
4.5	コンパクトリー群	73
第 5 章	ルートとウェイト	75
5.1	カルタン部分代数	75
5.2	カルタン標準系	76
5.2.1	SO(3) のカルタン標準形	80
5.3	ルート空間	81
5.3.1	$N_{\alpha, \beta}$ の決定	81
5.3.2	単純ルート	83
5.4	ディンキン図	88
5.5	ウェイト	91
5.5.1	リー代数の表現	91
5.5.2	ウェイト図	91
5.5.3	最高ウェイト	93
5.5.4	基本表現	95
5.6	Appendix	96

第 6 章	リー群の具体例	99
6.1	ユニタリ群	99
6.1.1	SU(2)	99
6.1.2	SU(3)	105
6.1.3	既約表現への分解	116
6.1.4	ヤング図	118
6.2	直交群	121
6.2.1	SO(3)	121
6.2.2	SO(N)	123
6.2.3	クリフォード代数	124
6.2.4	角運動量	127
6.2.5	水素原子の隠れた対称性: SO(4)	129
6.3	ローレンツ群	133
6.3.1	特殊相対性理論	133
6.3.2	ローレンツ群の性質	134
6.3.3	ローレンツ群のリー代数	135
6.3.4	ローレンツ群の表現	139
6.3.5	ディラック代数	140
6.3.6	ポアンカレ群	144
第 II 部	微分形式とその応用	147
第 7 章	微分形式とは	151
7.1	接空間と余接空間	151
7.2	r -形式	152
7.2.1	0-形式	152
7.2.2	1-形式	152
7.2.3	2-形式	152
7.2.4	3-形式	153
7.2.5	r -形式	153
7.3	外微分	155
第 8 章	ベクトル解析の諸公式の導出	157
8.1	(擬)スカラー、ベクトル、軸性ベクトル	157
8.2	grad, rot, div	158
8.2.1	grad	158
8.2.2	rot	159
8.2.3	div	160

8.2.4	その他の公式	160
第 9 章	多様体上の積分	163
9.1	線積分	163
9.2	面積分	164
9.3	ストークスの定理	165
9.4	ガウスの定理	166
第 10 章	閉形式と完全形式	167
10.1	ポアンカレの補題	167
10.2	積分可能条件	168
10.3	フロベニウスの条件	169
10.4	空間の連結性とポテンシャルの存在条件	170
10.5	ベッチ数	171
第 11 章	微分形式の応用	173
11.1	ホッジスター演算子	173
11.1.1	3次元空間	173
11.1.2	4次元空間	176
11.2	電磁気学	177
11.2.1	静電場	177
11.2.2	静磁場	178
11.2.3	マクスウェル方程式	179
11.3	曲線座標系	181
11.3.1	勾配	182
11.3.2	回転	183
11.3.3	発散	183
11.3.4	ラプラシアン	185
11.3.5	円筒座標	186
11.3.6	極座標	186
11.4	ゲージ理論	188
11.4.1	可換ゲージ理論	188
11.4.2	非可換ゲージ理論	189
11.4.3	チャーン・サイモンズ理論	189
第 12 章	微分幾何とトポロジカル現象	193
12.1	引き戻し	193
12.2	2次元強磁性体	193
12.3	3次元強磁性体	195
12.4	特異性を持たない織目構造	196

12.4.1	秩序変数	196
12.4.2	Mermin-Ho の関係式	197
12.4.3	織目構造	198

第I部

群論

第1章 群論の基礎

ある幾何学的対象物を離散的な回転、鏡映、平行移動によって自分自身に重ね合わせることができる時、これら3つの操作の組み合わせで構成される群を空間群（または結晶群）と呼ぶ。特に、回転と鏡映だけから構成される群を点群という。群の変換が不連続な群を離散群、連続な群を連続群という。また、元の数が有限個の群を有限群、無限個の群を無限群という。これらの概念を拡張して、物理法則を不変に保つような変換の集まりからなる群も構成できる。直交群、ユニタリ群、ゲージ群などがその代表例である。第1章ではこれらを理解するために必要な群論の基礎について述べる。

1.1 群の定義

群とは、ある共通した性質を持つ要素の集合と要素間の結合（すなわち、要素の和あるいは積）の法則が与えられているものをいう。以下では群 G の任意の2つの元 a と b の積を ab と書こう。結合法則が可換（アーベリアン）の時は、積 ab は和の形 $a+b$ で書かれる場合もある。 G が群であるための条件は次の3条件を満足していることである。

- 結合則 $(ab)c = a(bc)$
- 単位元 e を含むすべての元 $a \in G$ に対して $ae = ea = a$ が成立
- すべての元 $a \in G$ に対して逆元 a^{-1} が存在し $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ が成立

G のすべての元が互いに可換な時、 G は可換群（アーベル群）と呼ばれる。それ以外は非可換群（非アーベル群）と呼ばれる。群 G の元の数や群の位数 (order) といい、 $|G|$ と書く。

2つの群 G と K の直積集合 $G \times K := \{(g, k) | g \in G, k \in K\}$ は、結合則 $(g_1, k_1)(g_2, k_2) = (g_1g_2, k_1k_2)$ の下で群をなす。

1.2 部分群

群 G の空でない部分集合 H がそれ自身群をなす時、 H を G の部分群という。 H が G の部分群であるための必要十分条件は、 H の任意の元 a, b に対して ab^{-1} もまた H の元となることである。単位元のみからなる群 $\{e\}$ および G それ自身は G の自明な部分群である。他の部分群は非自明な部分群と呼ばれる。

1.3 正規部分群

G の正規部分群 (normal subgroup) H は、すべての $g \in G$ に対して $gHg^{-1} = H$ が成立する部分群である¹。すなわち、正規部分群は共役変換に対して不変な部分群である。自明な部分群である $\{e\}$ や G は正規部分群である。

1.4 中心化群、正規化群

群 G の部分集合 S を考える (S は部分群である必要はない)。 S のすべての元 s と可換な G の元からなる集合 $C_G(S)$ は G の部分群を成し、 G の中心化群 (centralizer) という。すなわち、

$$C_G(S) = \{g \in G \mid sg = gs \ (\forall s \in S)\}. \quad (1.1)$$

G の部分集合 S の共役 gSg^{-1} が S 自身に等しくなるような元 g の集合 $N_G(S)$ は G の部分群を成し、正規化群 (normalizer) と呼ばれる。すなわち、

$$N_G(S) = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}. \quad (1.2)$$

$N_G(S)$ の元 g は言わば S 全体と可換であり ($gS = Sg$)、 S の個別の元 s と可換である必要はないことに注意せよ。

特に、 $S = G$ の場合は、中心化群は単に中心 (center) とよばれ、 $Z(G)$ と書かれる。中心は可換群であり、かつ、正規部分群でもある。 G が可換群であるときには、 $Z(G) = G$ である。

¹不変部分群 (invariant subgroup) と呼ばれることもある。

1.5 置換群

置換群 (permutation group) G は、与えられた有限集合 M の要素を置換操作する元の集合である。置換群は M をそれ自身に移す 1 対 1 写像である。 M をそれ自身に移すすべての置換からなる群を集合 M の対称群 (symmetric group) といい、 S_n と書く。ここで、 n は集合 M の要素の数である。 S_n の位数 (元の個数) は $n!$ であり、任意の置換群は S_n の部分群である。2 個の要素を交換する操作を互換 (transposition) という。

位数 n の有限群の元は自然数 $1, 2, \dots, n$ を用いてラベル化することができる。この時、有限群の任意の置換 σ は、 $1, 2, \dots, n$ を i_1, i_2, \dots, i_n へおきかえる置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

とみなすことができる。ここで、 i_1, i_2, \dots, i_n は $1, 2, \dots, n$ を並び変えたものである。特に、 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, n-1 \rightarrow n, n \rightarrow 1$ なる置換を巡回置換 (cyclic permutation) と言い、 $(1, 2, \dots, n)$ と書き、 n -サイクルという。例えば、3-サイクルは $(1, 2, 3)$ と $(1, 3, 2)$ の 2 種類あり

$$(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1, 3, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

である。

対称群の例として要素の数が 3 の S_3 を考えよう。元の個数は $3! = 6$ 個で、これらを書き下すと

$$\begin{aligned} e, & \quad a_1 = (1, 2, 3), \quad a_2 = (3, 2, 1), \\ a_3 = (1, 2), & \quad a_4 = (2, 3), \quad a_5 = (3, 1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

となる。群の積の規則を一覧表にしたものを群表 (group table) という。 S_3 の群表を表 1.1 に示す。この表から置換群 S_3 は正規部分群 $Z_3 = \{e, a_1, a_2\}$ を持つことが分かる。

1.6 商群

H を G の部分群とする。任意の $g \in G$ に対して、

$$gH := \{gh | h \in H\} \quad (1.6)$$

を H の左剰余類 (left coset) という。同様に、右剰余類 (right coset) は

$$Hg := \{gh | h \in H\} \quad (1.7)$$

\backslash	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	e	a_5	a_3	a_4
a_2	a_2	e	a_1	a_4	a_5	a_3
a_3	a_3	a_4	a_5	e	a_1	a_2
a_4	a_4	a_5	a_3	a_2	e	a_1
a_5	a_5	a_3	a_4	a_1	a_2	e

表 1.1: 対称群 S_3 の群表。列の要素を最初に、次に、行の要素を作用させた結果を示す。たとえば、 $a_1a_3 = a_5$ である。

で定義される。

例えば、(1.5) の対称群 S_3 の場合、 $H = \{e, a_1, a_2\}$ は非自明な (正規) 部分群であり、 $\{a_3, a_4, a_5\}$ はその剰余類 $a_iH = Ha_i$ である。ここで、 i は $i = 3, 4, 5$ のどれでもよいことに注意しよう。また、左剰余類は右剰余類と等しい。これは、 H が G の正規部分群だからである。

G の部分群 H のすべての剰余類の位数 $|H|$ は同じである。実際、 $f(g) := g_2g_1^{-1}g$ に対する写像 $f: g_1H \rightarrow g_2H$ は、逆 $f^{-1}(g') = g_1g_2^{-1}g'$ が存在するので 1 対 1 である。従って、 g_1H と g_2H の位数は等しい。

$g_1, g_2 \in G$ とすると、 g_1H と g_2H は一致するか共通の元を持たない。実際、もし両者が共通の元を持つとすると、 $g_1h_1 = g_2h_2$ なる $h_1, h_2 \in H$ が存在するので、 $g_1 = g_2h_2h_1^{-1} \in g_2H$ となる。このとき、 g_1H の任意の元 h'_1 は $h'_1 = g_1h'$ ($h' \in H$) と書けるので、 $h'_1 = (g_2h_2h_1^{-1})h' = g_2(h_2h_1^{-1}h') \in g_2H$ となり、 $g_1H \subset g_2H$ となる。同様にして、 $g_2H \subset g_1H$ もいえるので、両者は一致する。対偶を取って、一致しないときは共通元を持たない。

この性質を用いることで、 G を互いに共通元を持たない剰余類に分割できる。特に、 H が正規部分群の場合は、 $gH = Hg$ であり、2 つの (左) 剰余類の積を $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$ で定義することで群構造を導入することができる。これを商群 (quotient group) といい G/H と書く²。たとえば、3 次の対称群の場合、商群 S_3/Z_3 は $Z_2 = \{Z_3, a_3Z_3\}$ で与えられる。以上の結果から、次のラグランジュの定理が得られる。

Theorem 1 (ラグランジュの定理) 有限群 G の位数 $|G|$ は、そのすべての部分群 H の位数 $|H|$ で割りきることができる。

商 $|G|/|H|$ は G の左または右剰余類の個数を与える。これを G における

²因子群 (factor group) あるいは剰余群 (residue class group) ともいう

H の指数 (index) といひ $[G : H]$ と書く。従つて、

$$|G| = [G : H] \cdot |H|. \quad (1.8)$$

有限群 G の任意の元 g の位数 k とは、 $g^k = e$ を満たす最小の自然数として定義される。この時、 $H := \{e, g, g^2, \dots, g^{k-1}\}$ は G の部分群をなす。ラグランジュの定理により、 k は $n := |G|$ の約数である。それゆゑ、

$$g^n = e \quad (1.9)$$

が G の任意の元 g に対して成立する。これから、フェルマーの小定理 (Fermat's little theorem)³、およびその一般化であるオイラーの定理 (Euler's theorem)⁴ が導かれる。特に、位数が素数 p の群は巡回群かつ単純群⁵ である。このことから Wilson の定理 (Wilson's theorem)⁶ が導かれる。

1.7 共役類

群 G の2つの元 a と b が G の元 g を用いて $b = g^{-1}ag$ と書ける時、互いに共役 (conjugate) であるという。ある与えられた元 a に共役なすべての元の集合を a の共役類という。

$$S(a) := \{g^{-1}ag \mid g \in G\} \quad (1.10)$$

定義により、共役類は次の性質を満たす。

$$g^{-1}S(a)g = S(a) \quad (\forall g \in G) \quad (1.11)$$

群 G は互いに交わらない共役類の和として書ける。例えば、対称群 S_3 は次のように共役類の直和に分解できる。

$$S_3 = \{e\} \oplus \{a_1, a_2\} \oplus \{a_3, a_4, a_5\} \quad (1.12)$$

共役類の直和で書ける部分群は正規部分群である。後に述べるように、共役類は群の既約表現と1対1の対応関係がある。

³ p を素数とすると、任意の整数 a に対して、 $a^p - a$ は p の倍数である。すなわち、 $a^p \equiv a \pmod{p}$ 。もし、 a が p の倍数でない (p が素数なので、これは a と p が互いに素であることと同じである) 場合は、フェルマーの小定理は $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ と書ける。

⁴ n と a が互いに素な自然数とすると、 $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ である。ここで、 $\phi(n)$ は n 以下で n と互いに素な数の個数を表す関数 (Euler's totient function) である。

⁵自明でない部分群を持たない群を単純群 (simple group) という。

⁶ p が素数の場合、 p は $(p-1)! + 1$ の素因数である。

1.8 射

射 (morphism) とは、ある対象 M から別な対象 M' へ数学的構造 (群の場合、単位元と積の構造) を保ったまま移す写像 f をいい、 $M \xrightarrow{f} M'$ と表記する。

群 G の各元 f が射 $M \xrightarrow{f} M$ をなし、単位元が恒等写像に対応する場合、 G の元は M 上の同型写像である⁷。 G は M への作用、すなわち M 上の同型写像全体のなす群 $\text{Aut}M$ の部分群となる。特に、 M が n 次元実ベクトル空間 V_n の場合は、 $\text{Aut}V_n = GL(n, \mathbf{R})$ は n 次元一般線形変換群となる。

1.8.1 準同型写像

群 G から群 K への写像 f が (群) 準同型 (group homomorphism) であるとは、 G の2つの元 a, b に対して $f(ab) = f(a)f(b)$ が成立することをいう。 f によって K の単位元に写像される G の元の集合を準同型写像の核 (kernel) といい、 $\text{Ker}f$ と表記する。また、 f によって移される G の像の全体を準同型写像の像 (image) といい $\text{Im}f$ と記す。特に、 $K = G$ の場合は、 G から自分自身への準同型写像となり、これを自己準同型 (endomorphism) という。

特に、次の準同型定理が重要である。

Theorem 2 (準同型定理) 写像 $f: G \rightarrow K$ が準同型写像とすると $G/\text{Ker}f \simeq \text{Im}f$.

特に、 f が全射の場合は $G/\text{Ker}f \simeq K$ である。

証明: $H = \text{Ker}f$ は G の部分群であり、正規部分群であることは $aH = Ha = \{g \in G \mid f(g) = f(a)\}$ となることからわかる。この式から、同値類 aH に $f(a)$ を対応させる写像は任意の a に対して一意に定まることがわかる。よって、 $f(a_1) \neq f(a_2)$ ならば $a_1H \neq a_2H$ である。したがって、 f は単射である。仮定により f は全射なので、 G/H から $\text{Im}f$ への写像は全単射な準同型写像であることがわかる。

1.8.2 同型写像

準同型写像 f が全単射 (bijection、写像が単射 (1対1) で、かつ、上への (全射) 写像) の時、同型写像 (isomorphism) という。連続な同型写像を同相写像 (homeomorphism) という。 G から K への準同型写像が同型

⁷群の各元は逆元を持つため写像は全単射である。

写像になるためには、写像の核が単位元のみで、かつ、像が K 全体に一致 ($\text{Im}f=K$) しなければならない (定理 2、準同型定理を参照せよ)。

1.8.3 自己同型

G から G への全単射の準同型写像 f を自己同型写像 (automorphism) という。このとき、 f は G の元を並べ替える置換の役割を果たす。内部自己同型写像は $g, x \in G$ に対して $\Phi(g)x = gxg^{-1}$ で定義される。 Φ を内部自己同型 (inner automorphism) といい $G \xrightarrow{\Phi} \text{Aut}G$ と書く。

第2章 表現論

群論の物理学への応用を考えると、群の様々な操作を物理的な状況に当てはめて具体的に計算することが必要になる。表現論はこの目的のために役立つ。群の性質は次に述べるベクトル空間で表現される。

2.1 ベクトル空間

群の操作を定量的に記述するためには、適当な座標系を導入してそれを用いて操作を表現する。具体的には、ベクトル空間 (vector space) を考えて、その中での線形変換として群の操作を表現する。ベクトル空間は線形空間 (linear space) とも呼ばれる。

ベクトル空間 V とは、和とスカラー倍が定義されたベクトルの集合をいう。具体的には、次の条件を満たすベクトルの集合をいう。

$$x, y \in V \text{ ならば } ax + by \in V \quad (\forall a, \forall b \in \mathbb{C}). \quad (2.1)$$

ここで、 \mathbb{C} は複素数全体の集合である。ベクトル空間 V の次元 n は V に属する線形独立なベクトルの最大個数によって与えられる（以下では、特に断らない限り、ベクトル空間の次元は有限とする）。それゆえ、ベクトル空間の基底 (basis) の完全な組は、ベクトル空間の次元 n と同じ数の基底ベクトル \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) からなる。ベクトル空間の任意の元は基底ベクトルの線形結合として一意に表される。

群の各元の作用は、ベクトルを別なベクトルに変換する線形変換 (linear transformation) として表現される。 T が線形変換の演算子である条件は

$$T(ax + by) = aT\mathbf{x} + bT\mathbf{y} \quad (2.2)$$

を満足することである。 T によって基底ベクトル \mathbf{a}_k は

$$T\mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i T_{ik} \quad (2.3)$$

と1次変換される。任意のベクトル \mathbf{x} は基底ベクトルを用いて $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i$ と展開できる。(2.3) を用いると、ベクトル \mathbf{x} は T によって次のように変

換されることが分かる¹。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &\equiv T\mathbf{x} = \sum_k x_k T\mathbf{a}_k = \sum_k x_k \sum_i \mathbf{a}_i T_{ik} \\ &=: \sum_i x'_i \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (2.4)$$

よって係数 x_i を成分とするベクトル (x_i) は T によって次のように変換されることが分かる。

$$x'_i = \sum_k T_{ik} x_k \quad (2.5)$$

これは、基底ベクトル $\{\mathbf{a}_i\}$ という「座標系」を定めることによって、線形演算子 T の n 行 n 列の行列表現 (T_{ik}) が得られたとみなすことができる。係数行列の変換式 (2.5) に現れる行列は、基底ベクトルの変換式 (2.3) に現れる行列の転置行列になっていることに注意しよう。

更に、別な線形演算子 S が

$$S\mathbf{a}_k = \sum_i \mathbf{a}_i S_{ik} \quad (2.6)$$

を満足する場合は、 S を $\mathbf{x}' = \sum_i x'_i \mathbf{a}_i$ に作用させて (2.5) を用いると

$$\mathbf{x}'' := S\mathbf{x}' = \sum_{i,k,l} \mathbf{a}_l S_{li} T_{ik} x_k \quad (2.7)$$

となるので

$$x''_l = \sum_{i,k} S_{li} T_{ik} x_k = \sum_k (ST)_{lk} x_k \quad (2.8)$$

が得られる。このように、線形演算子の行列表現は結合則を満たす。このような行列のうち、正則な行列のみを考えると逆行列も存在し、かつ、すべての基底ベクトル \mathbf{a}_i を自分自身に移す線形演算子である単位演算子 1 に対する行列表現は単位行列で与えられるので、そのような正則な行列全体の集合は群をなすことが分かる。これを一般線形変換群 (general linear transformation group) といい $GL(n, \mathbb{C})$ と書く。ここで、引数の n はベクトル空間の次元を表し、 \mathbb{C} は係数が複素数であることを意味している。

群 G から一般線形変換群 $GL(n, \mathbb{C})$ の中への準同型写像 D を群 G の (行列) 表現という。群 G の元 g ごとに行列表現 $D(g)$ が対応する。 $D(g)$ は n 行 n 列の正則行列で表される線形演算子であり、準同型写像の性質から次の性質を満足する。

¹ここで、記号 $:=$ は右辺が左辺によって定義されていることを意味する。同様に、 $:=$ は左辺が右辺によって定義されることを意味する。

- G の単位元 e には単位行列 $D(e) = 1$ が対応する。
- G の元 g の逆元 g^{-1} には逆行列が対応する : $D(g^{-1}) = D^{-1}(g)$ 。
- G の 2 つの元 g, g' の積 gg' の表現 $D(gg')$ はそれぞれの表現の積に等しい、すなわち、 $D(gg') = D(g)D(g')$ 、これは G から $GL(n, \mathbb{C})$ への写像が準同型写像であるという要請の帰結である。
- 表現の次元は、表現空間の次元 n として定義される。

群の元から表現行列への写像は準同型であるから、対応は一般には多対 1 である。特に、群のすべての元に単位行列 1 を対応させる表現を恒等表現、写像が 1 対 1 (単射) の表現は忠実な表現 (faithful representation) という。

群は線形空間で表現されるので、表現の基底は正規直交完全系であれば任意に選べる。ある基底 \mathbf{a}_i から別の基底 $\mathbf{a}'_i := S^{-1}\mathbf{a}_i$ へ変換すると、それに伴い表現も $D(g)$ から

$$D'(g) = S^{-1}D(g)S, \quad (2.9)$$

へと変換される。実際、このとき $D'(g)\mathbf{a}'_i = S^{-1}(D(g)\mathbf{a}_i)$ となるが、これは新しい基底を新しい表現で変換した結果 (左辺) は、元の基底で変換されたもの $D(g)\mathbf{a}_i$ に S^{-1} を作用させたものに等しいことを示している。(2.9) は変換行列 S による相似変換 (similarity transformation) と呼ばれる。群表は相似変換をしても変わらない。実際、相似変換 $a \rightarrow S^{-1}aS, b \rightarrow S^{-1}bS$ に対して、積の関係は $ab \rightarrow S^{-1}abS = (S^{-1}aS)(S^{-1}bS)$ となり保存される。従って、相似変換によって結ばれている 2 つの表現 D と D' は等価な表現 (equivalent representations) ということができる。すべての $g \in G$ に対して $D(g)$ がユニタリ行列のとき、表現はユニタリであるという。後に示されるように、有限群の表現はユニタリ表現に等価である。

例として、位数 3 の巡回群 (cyclic group) $Z_3 = \{e, a, b\}$ を考えよう。群表は表 2.1 に示している。各行と列にはそれぞれ群のすべての元が含まれていることに注意しよう。これは、各元に逆元が存在するために必要である。このことはまた、各元の作用が元の順序を置換することに他ならないことを意味している。 Z_3 のすべての元は 3 乗すると単位元になるので、 Z_3 の 1 次元表現は次のように与えられることが分かる。

$$D(e) = 1, \quad D(a) = e^{2\pi i/3}, \quad D(b) = e^{4\pi i/3}. \quad (2.10)$$

これらが群表 2.1 と同じ積の法則を満足していることは直接計算で確かめることができる。

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

表 2.1: 位数 3 の巡回群 Z_3 の群表。たとえば 2 行 3 列の要素は $ab = e$ であることを示している。

2.2 正則表現

群の元それぞれ自身が基底を構成するベクトル空間上の線形表現を正則表現 (regular representation) という。この時、群の位数 n に等しい数だけ異なる基底が取れるので、表現の次元は群の位数 n に等しい。群 G の元 g_i ($i = 1, 2, \dots, n$) から構成される表現の基底を $|g_i\rangle$ と書こう。群の元 g_i の表現を $D(g_i)$ と書くと、定義により $D(g_i)$ は基底 $|g_j\rangle$ を基底 $|g_i g_j\rangle$ へと変換する²。すなわち、

$$D(g_i)|g_j\rangle = |g_i g_j\rangle \quad (2.11)$$

基底 $|g_i\rangle$ を i 番目の要素だけが 1 で他の要素は 0 の列ベクトル

$$\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{i-1}^T \quad (2.12)$$

(T は転置を意味する)、 $\langle g_i|$ はそれを転置して得られた行ベクトルとみなすと、正則表現の基底は正規直交条件

$$\langle g_i|g_j\rangle = \delta_{ij} \quad (2.13)$$

を満たすことがわかる。また、 $D(g)$ は行列とみなせ、その行列要素は次のように与えられる。

$$[D(g)]_{ij} := \langle g_i|D(g)|g_j\rangle = \langle g_i|gg_j\rangle. \quad (2.14)$$

従って、 $D(g)$ は行と列がそれぞれ 1 を 1 個だけ含み、他は 0 の行列である。

例として、位数 3 の巡回群 $Z_3 = \{e, a, b\}$ を考えよう。正則表現の基底は $|e\rangle, |a\rangle, |b\rangle$ で与えられるので、正則表現 D の行列表示は次のようになることが分かる (群表 2.1 と比較せよ)。

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

²数学的な言い方をすると、 $D(g_i)$ は左正則表現 (left regular representation) であり、 $\forall g_j \in G$ に対して線形写像 $D(g_i) : g_j \mapsto g_i g_j$ を行う。

2.3 既約表現

表現 $D(g)$ は不変な部分空間 V を持つ場合に可約 (reducible) という。これは任意の $g \in G$ と任意の $v \in V$ に対して、 $D(g)v \in V$ であることを意味する。部分空間 V への射影演算子を P とすると、表現 D が可約な条件は次のように書ける。

$$PD(g)P = D(g)P \quad (\forall g \in G) \quad (2.16)$$

例として前節で議論した位数 3 の巡回群 Z_3 の正則表現 (2.15) を考えよう。ここで、射影演算子

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

を導入すると $D(g)P = P$ がすべての $g \in G$ に対して成立していることが分かる。よって、 $PD(g)P = P^2 = P = D(g)P$ となり、条件 (2.16) を満足している。従って、 P は正則表現 (2.15) の不変部分空間への射影演算子であり、表現は可約である。可約な表現空間はその群の不変部分空間であるが、元の表現は一般に複数の不変部分空間に分解できる。他方、不変部分空間に分解できない表現は既約 (irreducible) であるという。既約、可約の条件は次のようにいうこともできる。 $D(g)v$ を表現空間の基底で展開した時、どんな g に対しても、 $D(g)v$ が基底の真部分集合で展開できる時は可約、すべての基底が必要な場合は既約である。

ベクトル空間の次元を N とし、 P がベクトルの最初の n 成分のみ残り、残りの $(N - n)$ 成分を 0 とする射影演算子としよう。この時、群 G の表現が可約であるとは $\forall g \in G$ に対して、 G の表現が適当な相似変換によって次の形にできることと等価である。

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & X(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

ここで、 D_1, D_2, X はそれぞれ $n \times n, (N - n) \times (N - n), n \times (N - n)$ 行列である。(2.18) が可約表現の条件 (2.16) を満足していることは直接代入することで確かめることができる。

ある表現が、(相似変換によって) 既約表現の直和で表される場合、完全可約 (completely reducible) であるという。完全可約の条件は (2.16) に加えて $(I - P)D(g)(I - P) = D(I - P)$ が成立することである。このとき (2.18) の X がゼロになり、ブロック対角化される。ただし、ブロック対角化された各ブロックが既約であるとは限らない。一般に、行列表示の

場合は、完全可約な表現は既約な行列 D_j でブロック対角化できる。すなわち、

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = D_1(g) \oplus D_2(g) \oplus \cdots \quad (2.19)$$

後に示されるように、有限群の任意の表現は完全可約である。例えば、(2.15) の場合、ユニタリ演算子

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \omega = e^{2\pi i/3} \quad (2.20)$$

を用いて、相似変換 $D' = S^{-1}DS$ を行うことで、ブロック対角化された等価な表現が得られる。

$$\begin{aligned} D'(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \\ D'(b) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

無限群の例として加法群を考える。表現

$$D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

は $D(x)D(y) = D(x+y)$ を満足しており、単位元 $D(0) = 1$ と逆元 $D^{-1}(x) = D(-x)$ も存在するので加法群の表現となっている。この表現は可約であるが、完全可約ではなく、また、ユニタリでもない。実際、射影演算子

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

は $D(x)P = P$ 、従って (2.16) も満足するので可約である。しかし、 $D(x)(I-P) \neq (I-P)$ なので、完全可約ではない。また、 $D^{-1}(x) = D(-x) \neq D(x)^\dagger$ なので、ユニタリでもない。

2.4 有限群の基本定理

有限群の著しい特長は、表現がユニタリ表現に等価（すなわち、ユニタリ表現を相似変換したものに等しい）であり、かつ、完全可約なことである。これを以下で証明しよう。

Theorem 3 (有限群のユニタリ表現) 有限群の表現はユニタリ表現に等価である。

証明 有限群 G の任意の表現 $D(g)$ から次の演算子を定義する。

$$S := \sum_{g \in G} D(g)^\dagger D(g). \quad (2.24)$$

S はエルミートでかつ非負なので、ユニタリ変換で対角化でき、対角成分は非負である。

$$S = U^{-1} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U, \quad d_j \geq 0 \quad \forall j \quad (2.25)$$

実際には d_j はすべて正である。なぜならば、もしある d_j がゼロならば、ある 0 でないベクトル v に対して $Sv = 0$ となる。この時

$$0 = v^\dagger Sv = \sum_{g \in G} \|D(g)v\|^2 \quad (2.26)$$

となるので、すべての g に対して $D(g)v = 0$ でなければならないが、 $D(e) = 1$ なので矛盾する。よって、すべての j に対して $d_j > 0$ である。この場合、 S の平方根を

$$X \equiv S^{1/2} := U^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{d_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U \quad (2.27)$$

と定義すると、すべての d_j が正なので、その逆 X^{-1} が存在する。それを用いた新しい表現 $D'(g) = XD(g)X^{-1}$ を定義すると、これはユニタリである。実際、 $X^\dagger = X$ に注意すると

$$\begin{aligned} D'(g)^\dagger D'(g) &= X^{-1} D(g)^\dagger X^2 D(g) X^{-1} \\ &= X^{-1} D(g)^\dagger \sum_{h \in G} D(h)^\dagger D(h) D(g) X^{-1} \\ &= X^{-1} \sum_{h \in G} D(hg)^\dagger D(hg) X^{-1} \\ &= X^{-1} S X^{-1} = 1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

$D'(g)$ と $D(g)$ は相似変換で結ばれているので、両者は等価な表現である。それゆえ、 $D(g)$ はユニタリ表現に等価である。

Theorem 4 (ユニタリ表現の完全可約性) 群のユニタリ表現は完全可約である。とくに、有限群の表現は完全可約である。

証明 もし与えられた表現が既約であれば行列全体が一つのブロックを構成しており、完全可約である。もし、それが可約の場合は、すべての $g \in G$ に対して $PD(g)P = D(g)P$ が成立する射影演算子 P が存在する。両辺のエルミート共役をとると $PD(g)^\dagger P = PD(g)^\dagger$ が得られるが (射影演算子は $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ と書けるのでエルミートである) 定理3より $D(g)$ はユニタリなので $D(g)^\dagger = D(g)^{-1} = D(g^{-1})$ が成立する。この関係式はすべての g に対して成立するので、 g を g^{-1} とおいても成立する。それゆえ、 $PD(g)P = PD(g)$ であり、 $(1-P)D(g)(1-P) = D(g)(1-P)$ が成立する。これは、 $1-P$ もまた不変部分空間への射影演算子であることが分かり、 $D(g)$ はブロック対角化される。同様な手続きを繰り返すことにより D が完全可約であることが分かる。

Theorem 5 (可換有限群の既約表現) 可換な有限群のすべての既約表現は1次元である。

証明 後に示す定理12と(2.46)を用いる。可換群の場合、各共役類はただ1つの要素をもつ。定理12より、同値でない既約表現は共役類と同数だけ存在するので、既約表現の数は群の位数に等しい。さらに(2.46)より、表現の次数の2乗和は群の位数に等しい。すなわち、表現の次元はすべて1次元である。

Theorem 6 (量子力学への応用) もし、系のハミルトニアン H が、群 G の表現 D のすべての要素 $D(g)$ と交換する場合は、 H の固有状態として G の既約表現に従って変換するものを選ぶことができる。もし、ある既約表現がヒルベルト空間で一度しか現れないならば、既約表現のすべての状態は H の同じ固有エネルギーに属する固有状態である。

なぜならば、のちに示すシューアの補題より、 $H|a, j, x\rangle$ (a は既約表現を区別するラベル、 j は既約表現 a に属する状態を区別するラベル、 x はその他の量子数) は同じ既約表現に属しているので

$$H|a, j, x\rangle = \sum_y c_y |a, j, y\rangle. \quad (2.29)$$

もし、 x と y が一つの値しかとらないならば、 $|a, j, x\rangle$ は固有状態でなければならない。

可換群の場合は、 H の固有状態を表現の既約表現のもとで変換するように選ぶという手続きは、 H と $D(g)$ を同時に対角化するという事に類似している。例えば、パリティに関連した Z_2 群の場合は、ハミルトニアン固有値をパリティ変換に対して対称あるいは反対称にいつでも選ぶことができる。

2.5 シュアの補題

シュアの補題 (Shur's lemma) は補題 1 と補題 2 からなり、物理学の様々な場面で役立つ。

Theorem 7 (シュアの補題 1) 2 つの既約表現 D_1 と D_2 がすべての $g \in G$ に対して $D_1(g)A = AD_2(g)$ を満たすならば、 $A = 0$ であるか、または、 D_1 と D_2 は等価な表現である。ここで、等価な表現とは相似変換で互いに移り変わる表現をいう。

証明 もし A が正方行列ではない m 行 n 列の行列とすると $Av = 0$ または $vA = 0$ となるゼロでないベクトル v が存在する。前者は $m < n$ の場合であり、後者は逆の場合である。 $m < n$ の場合、 v の張るベクトル空間 (これは A の核 (kernel) である) への射影演算子を P とすると、 $AP = 0$ でなければならないのですべての $g \in G$ に対して

$$AD_2(g)P = D_1(g)AP = 0 \quad (2.30)$$

が成立する。ところが D_2 は既約なので、 $D_2(g)P$ は g を G 内で動かすと n 次元ベクトル空間の全体を覆う。よって、 $A = 0$ でなければならぬ。 $m > n$ の場合も同じである。次に、 A が正方行列の場合を考える。もし A^{-1} が存在しなければ $Av = 0$ なるゼロでないベクトル v が存在するので前と同じ議論で $A = 0$ となる。 A^{-1} が存在すれば、 D_1 と D_2 は互いに相似変換で結ばれるので等価な表現であることが分かる。(証明終わり)

上の定理は次のような形で述べられることもある。本質的には同じ内容である。

Theorem 8 (シュアの補題 1') 群 G の 2 つの既約表現を D_1 、 D_2 とし、それぞれの表現空間を V_1 、 V_2 とする。 V_1 から V_2 への 1 次変換 A がすべての $g \in G$ に対して $AD_1(g) = D_2(g)A$ をみたすならば、 A は V_1 から V_2 への同型写像であるか $A = 0$ である。

証明 A の核 $N = \{x \in V_1 | Ax = 0\}$ に対して、 $AD_1(g)x = D_2(g)Ax = 0$ なので $D_1(g)x \in N$ である。従って、 N は表現 D_1 の不変部分空間である。

従って、 $N = V_1$ であるか $N = \{\emptyset\}$ である (仮定により D_1 が既約であることに注意せよ)。 $N = V_1$ のときは $A = 0$ でなければならない。 $N = \{\emptyset\}$ のときは、 A は $A \neq 0$ であり、かつ単射である。 実際、 $Ax_1 = Ax_2$ を満足する異なる x_1, x_2 が存在すれば、 $A(x_1 - x_2) = 0$ となり、 $x_1 - x_2 \in N$ となり N が空集合であることに矛盾する。 また、 A は全射でもある。 実際、任意の $x \in V_1$ に対して $D_2Ax = AD_1x \in V_2$ なので、 V_1 の像 AV_1 は D_2 の不変部分空間である。 D_2 は既約なので $AV_1 = V_2$ 。 よって、 A は V_1 から V_2 への全単射 (同型写像) である。(証明終わり)

Theorem 9 (シュアの補題 2) 群 G の有限次元の既約表現 D に対して、すべての $g \in G$ に対して $D(g)A = AD(g)$ を満たす A は単位行列、すなわち、単位元の表現に比例する。

証明 有限次元の行列 A と単位行列 I から作られる行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ の解の一つを λ 、それに対応する固有ベクトルを v とすると $(A - \lambda I)v = 0$ が成立する。それゆえ、 $D(g)(A - \lambda I)v = (A - \lambda I)D(g)v = 0$ がすべての $g \in G$ で成立する。仮定により D は既約なので $A - \lambda I = 0$ でなければならない。(証明終わり)

同じ内容を次のように言い換えることもできる。

Theorem 10 (シュアの補題 2') 有限群 G の表現 D が既約であるための必要十分条件は、すべての $D(g)$ ($g \in G$) と可換な 1 次変換 (行列) A が $A = aI$ ($a \in C$) に限られることである。

証明 (必要条件) λ を A の固有値とし $B = A - \lambda I$ とすると $\det B = 0$ である。このとき、仮定によりすべての $g \in G$ に対して $BD(g) = D(g)B$ であるから定理 8 により B は同型写像であるか $B = 0$ である。しかし、 $\det B = 0$ なので同型写像ではありえない。よって $B = 0$ 、すなわち、 $A = aI$ である。

(十分条件) 十分条件の対偶を示す。すなわち、表現 D が既約でないときは、すべての $D(g)$ と可換な A であっても、 $A = aI$ でないものが存在することを言えば良い。 D の既約な不変部分空間への射影 P をとると、 $PD(g)P = D(g)P$ が成立する。また D は完全可約であるから、 $(1 - P)D(g)(1 - P) = D(g)(1 - P)$ でもある。この 2 つから $D(g)P = PD(g) = PD(g)P$ となる。よって、 P はすべての $D(g)$ と可換であることが分かる。しかし、 D が既約でないとするれば、 P は非自明な部分空間への射影であるから $P = aI$ の形には書けないことがわかる。(証明終わり)

対称群による変換に対して不変な演算子の行列要素は、シュアのレナマにおける行列 A と同様な振る舞いをすることを示そう。対称群 G の元 g のユニタリ表現 $D(g)$ を考える。ユニタリ表現は完全可約なので (2.19)

の形にブロック対角化できる。その行列要素を考えるために完全系をなす規格直交基底 $\{|a, j, x\rangle\}$ を考える。ここで、 a は分解されたそれぞれの既約表現を指定するラベル、 $j = 1, 2, \dots, n_a$ はその表現の行列要素、そして、 x はそれ以外の状態を指定するパラメーターであるとする。規格直交条件は

$$\langle a, j, x | b, k, y \rangle = \delta_{ab} \delta_{jk} \delta_{xy} \quad (2.31)$$

である。すると、表現の行列要素は次のように書ける。

$$\langle a, j, x | D(g) | b, k, y \rangle = \delta_{ab} \delta_{xy} [D_a(g)]_{jk} \quad (2.32)$$

この対称変換によって基底は $|\mu\rangle \rightarrow D(g)|\mu\rangle$, $\langle\mu| \rightarrow \langle\mu|D(g)^\dagger$ と変換されるので、演算子は $O \rightarrow D(g)OD(g)^\dagger$ と変換されることがわかる（この時行列要素は不変になる）。したがって、この対称変換に対して不変なオブザーバブル O に対しては次の関係式が成立する。

$$D(g)OD(g)^\dagger = O \rightarrow [O, D(g)] = 0 \quad (\forall g \in G). \quad (2.33)$$

両辺の行列要素をとり、条件 (2.32) を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= \langle a, j, x | [O, D(g)] | b, k, y \rangle \\ &= \sum_{k'} \langle a, j, x | O | b, k', y \rangle [D_b(g)]_{k'k} - \sum_{j'} \langle a, j', x | O | b, k, y \rangle [D_a(g)]_{jj'} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$a \neq b$ ならば D_a と D_b は無関係な値をとるので (2.34) が成立するためには行列要素はゼロでなければならない。また、 $a = b$ の時は、同じ表現であっても異なった行列要素は独立な値をとれるので (2.34) が成立するためには、 j, k に関係する部分の行列要素は単位行列 I のそれに比例しなければならない。よって、

$$\langle a, j, x | O | b, k, y \rangle = \delta_{ab} \delta_{jk} f_a(x, y). \quad (2.35)$$

このように、行列要素の物理量に対する依存性は $f_a(x, y)$ だけで表され、演算子 O はシューアのレンマの A と同様の変換をすることがわかる。

2.6 表現の直交性

この節では、群の有限次元の既約表現が満足する直交性関係式とユニタリ既約表現の完全性について述べる。

群 G の有限次元の任意の既約表現 D_a, D_b に対して、次のような線形演算子を考えよう。

$$A_{jl}^{ab} \equiv \sum_{g \in G} D_a(g^{-1})|a, j\rangle\langle b, l|D_b(g). \quad (2.36)$$

両辺の左側から $D_a(g_1)$ を作用させると、表現の準同型性より

$$\begin{aligned} D_a(g_1)A_{jl}^{ab} &= \sum_{g \in G} D_a(g_1g^{-1})|a, j\rangle\langle b, l|D_b(g) \\ &= \sum_{g' \in G} D_a(g'^{-1})|a, j\rangle\langle b, l|D_b(g'g_1) \quad (g \rightarrow g'g_1) \\ &= \sum_{g' \in G} D_a(g'^{-1})|a, j\rangle\langle b, l|D_b(g')D_b(g_1) \\ &= A_{jl}^{ab}D_b(g_1). \end{aligned} \quad (2.37)$$

この関係式はすべての $g_1 \in G$ に対して成立するので、 $a \neq b$ の場合は定理 7 より $A_{jl}^{ab} = 0$ 、 $a = b$ の場合は定理 9 より $A_{jl}^{ab} \propto I$ となる。比例係数を C_{jl}^a とおくと

$$A_{jl}^{ab} \equiv \sum_{g \in G} D_a(g^{-1})|a, j\rangle\langle b, l|D_b(g) = \delta_{ab}C_{jl}^a I, \quad (2.38)$$

C_{jl}^a を決定するために両辺のトレースをとると

$$\text{Tr}A_{jl}^{ab} = \delta_{ab}C_{jl}^a \text{Tr}I = \delta_{ab}C_{jl}^a n_a \quad (2.39)$$

ここで n_a は表現 D_a の次元である。他方、(2.36) の定義式から

$$\text{Tr}A_{jl}^{ab} = \delta_{ab} \sum_{g \in G} \langle b, l|D_a(g)D_a(g^{-1})|a, j\rangle = N\delta_{ab}\delta_{jl} \quad (2.40)$$

が得られる。ここで N は群の位数である。よって、 $C_{jl}^a = N\delta_{jl}/n_a$ が得られる。これを (2.38) に代入すると

$$\sum_{g \in G} D_a(g^{-1})|a, j\rangle\langle b, l|D_b(g) = \frac{N}{n_a}\delta_{ab}\delta_{jl}I. \quad (2.41)$$

両辺の行列要素をとると

$$\sum_{g \in G} [D_a(g^{-1})]_{kj}[D_b(g)]_{lm} = \frac{N}{n_a}\delta_{ab}\delta_{jl}\delta_{km}. \quad (2.42)$$

D_a がユニタリ表現の場合は

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N}[D_a(g)]_{jk}^*[D_b(g)]_{lm} = \delta_{ab}\delta_{jl}\delta_{km}. \quad (2.43)$$

これから、ユニタリ既約表現の行列要素

$$\sqrt{\frac{n_\alpha}{N}}[D_\alpha(g)]_{jk} \quad (2.44)$$

が群の元 g を引数とする正規規格直交関数であることがわかる。従って、これらの関数は互いに線形独立である。(2.44) はそれに加えて完全系を成す、すなわち、 g の任意の関数 $f(g)$ が (2.44) を用いて展開することができる。実際、正規表現の基底 $\{|g\rangle\}$ を用いると

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{g' \in G} f(g') \delta_{gg'} = \sum_{g' \in G} f(g') \langle g' | g \rangle \\ &= \sum_{g' \in G} f(g') \langle g' | D_R(g) | e \rangle \\ &= \sum_{g' \in G} f(g') [D_R(g)]_{g'e}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

ここで D_R は正則表現 (すなわち、群の要素を基底とする表現) である。ユニタリ表現 D_R は完全可約なので既約表現の行列要素の線形結合で表すことができる。それゆえ、ユニタリ既約表現は完全系をなす。これを定理の形にまとめると、

Theorem 11 (ユニタリ既約表現の完全性) 群 G のユニタリ既約表現の行列要素は、正則表現のベクトル空間における正規直交完全系をなし、 G の元 g の任意の関数はそれを用いて展開できる。

群の位数は N 、各表現の行列要素の数は n_α^2 なので、定理 11 から次の系が成立する。

$$N = \sum_{\alpha} n_\alpha^2. \quad (2.46)$$

この関係式は、既約表現がいくつあり、その次元が何であるかを簡便に与えてくれる。たとえば、3 次対称群 S_3 の場合、元の数 $N = 3! = 6$ であり、かつ、常に自明な 1 次元表現が存在するので、それを $n_0 = 1$ とすると、残りの $6-1=5$ を自然数の自乗の和であらわす方法は $5 = 1^2 + 2^2$ しかないので $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ である。ゆえに、3 次対称群には 1 次元表現が 2 個 (自明なものが 1 個、非自明なものが 1 個) と 2 次元表現が 1 個存在することがわかる。

ユニタリ既約表現の例として、位数が N の巡回群 Z_N を考えよう。群の元を g_i for $i = 0, 1, \dots, N-1$ ($g_0 = e$) とすると巡回群の定義から

$$g_i g_j = g_{(i+j) \bmod N}. \quad (2.47)$$

この条件を満足する Z_N の 1 次元既約表現は (可換な有限群の既約表現は 1 次元のみである)

$$D_n(g_j) = e^{2\pi i n j / N} \quad (j = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2.48)$$

で与えられる。この表現は正規直交条件

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i n' j / N} e^{2\pi i n j / N} = \delta_{nn'} \quad (2.49)$$

を満足しているが、これは (2.43) で $n_a = 1$ とおいたものに一致している。

2.7 指標

既約表現を特徴づける上で指標 (character) は重要な役割を果たす。指標は様々な直交条件を満たし、与えられた表現に含まれる既約表現をとりだす上でも役立つ表現の基底によらない不変量である。群の表現 D の指標 $\chi_D(g)$ とはそのトレースで定義される。

$$\chi_D(g) \equiv \text{Tr} D(g) = \sum_i [D(g)]_{ii}. \quad (2.50)$$

トレースは引数の順序をサイクリックに入れ替えても不変 (これをトレースのサイクル不変性 (cyclic property of the trace) という) なので、トレースおよび指標は相似変換に対して不変である。

互いに等価でない既約表現の指標は互いに直交する、すなわち、2 つの既約表現 D_a と D_b に対して

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_{D_b}(g) = \delta_{ab} \quad (2.51)$$

が成立する。実際、(2.51) の左辺は (2.43) を用いて変形すると

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G, i, j} [D_a(g)]_{ii}^* [D_b(g)]_{jj} = \frac{1}{n_a} \sum_{ij} \delta_{ab} \delta_{ij} = \delta_{ab} \quad (2.52)$$

が得られる。

表現の準同型性とトレースの性質を用いると、同一の同値類 (共役類) に属する元に対して指標が一定値をとることが分かる。実際、

$$\text{Tr} D(g^{-1} g_1 g) = \text{Tr} \{ D(g^{-1}) D(g_1) D(g) \} = \text{Tr} D(g_1) \quad (2.53)$$

指標は同一の同値類に属する元に対して一定値をとる関数に対する完全系基底を形成している。 $f(g)$ をそのような関数として、それを既約表現の行列要素で展開しよう。

$$f(g) = \sum_{a,j,k} c_{jk}^a [D_a(g)]_{jk}, \quad (2.54)$$

f は各同値類では一定値をとるので、

$$\begin{aligned} f(g) &= \frac{1}{N} \sum_{g' \in G} f(g'^{-1}gg') = \frac{1}{N} \sum_{g' \in G} \sum_{a,j,k} c_{jk}^a [D_a(g'^{-1}gg')]_{jk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{g' \in G} \sum_{a,j,k,l,m} c_{jk}^a [D_a(g'^{-1})]_{jl} [D_a(g)]_{lm} [D_a(g')]_{mk} \end{aligned} \quad (2.55)$$

ここで (2.42) を用いて g' に関する和を実行すると

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{a,j,k,l,m} \frac{1}{n_a} c_{jk}^a \delta_{jk} \delta_{lm} [D_a(g)]_{lm} \\ &= \sum_{a,j,l} \frac{1}{n_a} c_{jj}^a [D_a(g)]_{ll} \\ &= \sum_{a,j} \frac{1}{n_a} c_{jj}^a \chi_a(g). \end{aligned} \quad (2.56)$$

こうして、共役類上で一定値をとる任意の関数は指標を用いて展開できることがわかった。

同じ同値類に属する任意の2つの元は相似変換で結ばれているのでそれらの表現は同値である。また、異なった同値類に属する指標は直交しているので、対応する既約表現も異なっている。以上のことから次の定理が得られる。

Theorem 12 (既約表現の数 = 共役類の数) 同値でない既約表現の数は、共役類の数に等しい。

同じ同値類に属するすべての元の指標は等しいので、同値類 α の元の数を k_α とすると (2.51) は次のように書ける。

$$\sum_{\alpha} \frac{k_\alpha}{N} \chi_{D_a}(g_\alpha)^* \chi_{D_b}(g_\alpha) = \delta_{ab} \quad (2.57)$$

ここで、 \sum_{α} はすべての異なる同値類についての和を意味する。各同値類では指標は一定の値をとるので、(2.57) の g_α は同値類 α に属する任意の元を選べばよいことに注意しよう。ここで、行列

$$U_{\alpha a} := \sqrt{\frac{k_\alpha}{N}} \chi_{D_a}(g_\alpha) \quad (2.58)$$

を導入する。これは定理 12 より正方行列であり、(2.57) より $U^\dagger U = 1$ なのでユニタリ行列であることが分かる。従って、 $UU^\dagger = 1$ も成立する。これを書き下すと

$$\sum_a \chi_{D_a}(g_\alpha)^* \chi_{D_a}(g_\beta) = \frac{N}{k_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.59)$$

が得られる。

任意の表現 D を適当に相似変換して既約表現の行列でブロック対角化すると、 D には一般に既約表現 D_a が m_a 個ずつ含まれる。この数は指標の直交関係式 (2.51) を用いることによって次のように求められる。

$$m_a^D = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_D(g). \quad (2.60)$$

具体例として正則表現を考えよう。

$$[D_R(g)]_{g'g''} = \langle g' | D_R(g) | g'' \rangle = \langle g' | gg'' \rangle. \quad (2.61)$$

指標は

$$\chi_R(g) = \text{Tr} D_R(g) = \sum_{g' \in G} \langle g' | gg' \rangle = N \delta_{ge}. \quad (2.62)$$

で与えられる。これを (2.60) へ代入すると

$$m_a^R = \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \delta_{ge} = \chi_{D_a}(e)^* = n_a \quad (2.63)$$

こうして正則表現 D に含まれる既約表現 D_a の数 m_a は、表現の次元 n_a に等しいことが分かる。

指標は可約表現を既約表現へ分解するためにも役立つ。(2.43) で $j = k$ とおいて j について和をとると

$$\frac{n_a}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* [D_b(g)]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{lm} \quad (2.64)$$

が得られる。この結果は、表現 D をブロック対角化した形で書くと、左辺はそのブロック D_b が D_a と一致する場合のみゼロでなく、その時単位行列となると解釈できる。従って、任意の表現 D に対して

$$P_a = \frac{n_a}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* D(g) \quad (2.65)$$

は既約表現 D_a への射影演算子であると解釈できる。

最後に直積表現に対する指標を考えよう。 D_1 と D_2 が群 G のそれぞれ m 、 n 次元の表現であるとする。表現の基底は D_1 が $\{|j\rangle\}$ ($j = 1, \dots, m$)、 D_2 が $\{|x\rangle\}$ ($x = 1, \dots, n$) であるとする。これら 2 つの表現の直積表現 (direct product)³ $D_1 \otimes D_2$ は

$$\langle j, x | D_1 \otimes D_2 | k, y \rangle \equiv \langle j | D_1(g) | k \rangle \langle x | D_2(g) | y \rangle. \quad (2.66)$$

で定義される mn 次元の表現である。両辺のトレースをとると

$$\chi_{D_1 \times D_2} = \chi_{D_1} \chi_{D_2}. \quad (2.67)$$

のように直積表現の指標は元の表現の指標の積で与えられることが分かる。表現 D_1 、 D_2 が既約であっても、それらの直積表現 $D_1 \otimes D_2$ は既約であるとは限らない。直積表現の中にどのような既約表現が含まれているかを知ることによってより高次の既約表現を求めることができる。

2.8 ヤング図

ヤング図 (Young tableau, Young diagram) を用いると、既約表現の個数が直ちにわかる。前節 (定理 12) で述べたように、既約表現と共役類の間には 1:1 の対応関係がある。共役類とサイクリック構造 (cyclic structure) の間にも 1:1 の対応関係がある。それゆえ、各サイクル構造には 1 つの既約表現が対応している。ヤング図はサイクル構造を図式的に表したものであり、ヤング図を調べることによって既約表現を求めることができる。1 つのヤング図には 1 つの共役類、従って、1 つの既約表現が対応している。

ヤング図は箱の集まりであり、箱の数は群の位数 n に等しい。 j 個の元の巡回置換を j -サイクル (j -cycle) とよび、 j 個の箱を縦に並べる。例えば、対称群 S_4 の 4-サイクル (1,2,3,4) は



と書ける。また、単位元は 4 個の 1-サイクルからなり [(1)(2)(3)(4)]、ヤング図は



で与えられる。 S_7 の元のうち、3-サイクルが 1 個、2-サイクルが 1 個、1-サイクルが 2 個のヤング図は次のようになる。



(2.68)

³テンソル積表現 (tensor product representation) とも呼ばれる。

n 個の箱からなるヤング図を考えることで、正則表現で表された既約表現を求めることができる。まず、1 から n までの自然数を n 個の箱に記入する。例として、(2.68) のヤング図に 1 から 7 までの数字を当てはめることを考える。たとえば

6	5	3	2
1	7		
4			

のように数字が割り当てられたとしよう。これを各行ごとに左から右へと数字を読む。この例の場合は 6532174 である。この配列は正則表現における状態 $|6532174\rangle$ に対応している。その上で、同じ列の数字に対して反対称化の操作を行い、次いで同じ行の数字に対して対称化操作を行うことで求める既約表現が得られる。以下に具体例を示す。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow |12\rangle + |21\rangle$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle.$$

このように構成された各ヤング図が現れる回数 d (これが、そのヤング図に対応する既約表現の次元を与える) は

$$d = \frac{n!}{H} \quad (2.69)$$

で与えられる。ここで、 H は「留め金因子」(hooks factor) あるいはフック因子と呼ばれる量で次のように計算される。箱を一つ固定して、その箱の真下の一番下の箱から出発して垂直に上がり、その箱に到達したら右へ方向転換し水平方向へ右へ移動する。そして、右端に到達するまでに通過した箱の数を h_1 とする。このような操作をすべての箱に対して行う。各箱が留め金の角に来るように考えて、そのような留金を通過する箱の数を数えるのである。こうして、 $H = h_1 h_2 \cdots$ が与えられる。たとえば、上の 7 個の箱のヤング図に対応する各箱のフック長 (hook length) を箱の中に書き入れると次のようになる。

6	4	2	1
3	1		
1			

よって、上のヤング図が現れる回数は

$$\frac{7!}{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 35$$

で与えられる。

それぞれのヤング図に対する表現が同値でない既約表現をなすこと、およびフック因子と表現の次元の関係は

Bruce E. Sagan, *The Symmetric Group* (Westview Press, 1999)

の pp. 53-73, 124-131 に証明が記載されている。

2.9 具体例—対称群 S_3

2.9.1 既約表現

3次の対称群 S_3 は $3! = 6$ 個の元からなり、それらは (1.5) に与えられている。群表 1.1 からわかるように、 S_3 の元の積は一般には交換しないので、非アーベル群である。それゆえ、既約表現は2次元以上であり、表現行列のすべてを同時に対角化することはできない(それができると、1次元表現になってしまう)。 S_3 のユニタリ表現は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} D(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D(a_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ D(a_3) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D(a_5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

これらが群表 1.1 を満足することは直接計算で確かめることができる。これは、原点を中心とする正三角形の頂点を置換する合同変換に対応している。

2.9.2 指標

指標 (character) は表現のトレースなので、(2.70) のように表現が具体的に求められるとそこから指標を直ちに計算することはできる。しかし、指標の直交性条件などを用いることで、表現に頼らずに指標を計算することもできる。ここではそれについて議論する。まず、 S_3 の同値類が $\{e\}, \{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}$ で与えられることを思い出そう。自明な1次元表現 D_0 は、群のすべての元に対して $D_0(g) = 1$ なるものである。この場合、指標は明らかに $\chi_0(g) = 1$ である。表現の次元に対する関係式 (2.46) $\sum_a n_a^2 = N$ を用いると、このほかに非自明な1次元表現が1個、2次元表現が1個存在することが分かる ($1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$)。

非自明な1次元表現 D_1 は $H = \{e, a_1, a_2\}$ が S_3 の不変部分群であり、因子群 S_3/H が Z_2 であることを利用して求めることができる。すなわち、 $x^2 = 1$ より1次元表現は $x = 1, -1$ である。この場合、自明な表現は H に対しては1、残りの $\{a_3, a_4, a_5\}$ に対しては-1を割り当てることができる。従って、求める指数は前者に対しては $\chi_1(e) = 1$ 、後者に対しては $\chi_1(a_3) = -1$ である。2次元表現 D_2 については、 $D_2(e)$ が2行2列の単位行列なので $\chi_2(e) = 2$ である。他の値は、 $\chi_2(a_1) = x, \chi_2(a_3) = y$ とおくと、規格直交条件 (2.57) より自明な1次元表現との直交性より $2+2x+3y = 0$ 、非自明な1次元表現との直交性より $2+2x-3y = 0$ 。よって、 $x = -1, y = 0$ が得られる。すなわち、 $\chi_2(a_1) = -1, \chi_2(a_3) = 0$ である。この結果は、(2.70) から直接確かめることができる。結果を表 2.2 にまとめる。

表 2.2: 対称群 S_3 の指標を 1, 2, 3, 6 の各次元の場合について示した。1次元は自明な表現 D_0 と非自明な表現 D_1 の2種類が存在する。3次元表現 D_3 については節 2.9.3 を参照。6次元表現は、 D_2 と D_3 のテンソル積表現で与えられ、その指標はそれぞれの指標の積で与えられる ((2.67) 参照)

次元	同値類		
	$\{e\}$	$\{a_1, a_2\}$	$\{a_3, a_4, a_5\}$
1 (D_0)	1	1	1
1 (D_1)	1	1	-1
2 (D_2)	2	-1	0
3 (D_3)	3	0	1
6 ($D_2 \otimes D_3$)	6	0	0

2.9.3 正則表現

S_3 の置換表現は 3 次元であり、(2.15) と同様にして次のように与えられる。

$$\begin{aligned} D_3(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_3(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_3(a_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3(a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_3(a_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D_3(a_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

これらから表 2.9.2 の指標が得られる。これに公式 (2.65) を当てはめると、既約表現への射影演算子が得られる

$$P_0 = \frac{1}{6} \left(D_3(e) + \sum_{j=1}^5 D_3(a_j) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

$$P_1 = \frac{1}{6} \left(D_3(e) + \sum_{j=1}^2 D_3(a_j) - \sum_{j=3}^5 D_3(a_j) \right) = 0 \quad (2.73)$$

$$P_2 = \frac{2}{6} \left(2D_3(e) - \sum_{j=1}^2 D_3(a_j) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

これから P_0 が不変部分空間 $(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)/\sqrt{3}$ への射影演算子であることが分かる。他方、 P_2 は基底ベクトルの対によって張られる 2 次元部分空間への射影演算子である。こうして、 D_3 は既約表現の直和に分解される。

$$D_3 = D_0 \oplus D_2 \quad (2.75)$$

2.9.4 ヤング図

対称群 S_3 は 3 つの同値類を持つ: $\{e\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_4, a_5\}$ 。 $\{e\}$ に対するヤング図は

$$\square\square\square$$

で与えられる。これに対する要素の数は $3!/3! = 1$ である。2番目の類 $\{a_1, a_2\}$ に属する元は、3-サイクルの巡回置換であり、対応するヤング図は



で与えられ、元の数には確かに $3!/3 = 2$ である。3番目の類 $\{a_3, a_4, a_5\}$ は2-サイクルの巡回置換と1-サイクルの巡回置換（恒等置換）からなり、対応するヤング図は



で与えられる。元の数には確かに $3!/2 = 3$ 個である。

前節 2.8 で述べたように、ヤング図



は完全対称な状態であり、従って自明な表現に対応する 1次元部分空間に対応している。これに対してヤング図



は完全反対称の状態であり、従ってやはり 1次元部分空間に対応している。この場合、2つの要素の置換に対して符号を変えるので、この 1次元表現には指標 -1 が与えられる。ヤング図



は同じ行に属する数字については対称化、同じ列に属する数字については反対称化されるので、次のような状態に対応している。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle;$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |321\rangle + |231\rangle - |123\rangle - |213\rangle;$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |231\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle;$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |132\rangle + |312\rangle - |231\rangle - |321\rangle;$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |312\rangle + |132\rangle - |213\rangle - |123\rangle;$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |213\rangle + |123\rangle - |312\rangle - |132\rangle.$$

2, 4, 6 個目の状態は 1, 3, 5 個目の状態を -1 倍することで得られ、また 1, 3, 5 個目の状態を足し合わせると消えることが分かる。これはこれらの状態の張る部分空間が 2 次元であることを意味している。これらの状態は S_3 の 2 次元の既約表現として変換される。実際、この Young 図のフック因子は 3 なので、既約表現の次元は

$$\frac{3!}{3} = 2 \tag{2.76}$$

であることがわかる。

第3章 リー群の基礎

リー群は Marius Sophus Lie (1842-1899) によって導入された、微分多様体上で連続的な操作が可能な群である。このために物理学における適用範囲が広く、様々な分野に応用されている。単純リー群は4種類の古典リー群（一般および特殊線形変換群、ユニタリ群、シンプレクティック群、直交群）と5種類の例外群 (E_6, E_7, E_8, F_4, G_2) からなっている。これらの分類は Wilhelm Killing と Élie Cartan によってなされた。古典リー群は A、B、C、D などと名付けられている¹。

3.1 線形変換群

n 次元複素ベクトル空間における正則な1次変換全体は群をなし、複素一般線形変換群 (general linear transformation groups over the field of complex numbers) $GL(n, \mathbf{C})$ という。 n 次元実正則行列の全体はその部分群をなし、実一般線形変換群 $GL(n, \mathbf{R})$ という。これらのうち、特に行列式が1であるもの全体は部分群をなし、それぞれ複素特殊線形変換群 $SL(n, \mathbf{C})$ 、実特殊線形変換群 $SL(n, \mathbf{R})$ という。ここで S は special (特殊) の頭文字である。

内積による距離が定義されたベクトル空間を計量ベクトル空間 (metric vector space) という。そこで、距離を導入するために必要なベクトルの内積を定義する。 n 次元ベクトル空間の正規直交基底 (orthonormal basis) を $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ とする。これらは次の内積を満足する。

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}. \quad (3.1)$$

この基底を用いて2つのベクトルを $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i$ 、 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ と展開すると、これらの内積は (3.1) を用いると、次のように与えられる。

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i. \quad (3.2)$$

¹具体的な対応関係は、 A_n は $\mathfrak{su}(n+1)$ ($n \geq 1$)、 B_n は $\mathfrak{so}(2n+1)$ ($n \geq 2$)、 C_n は $\mathfrak{sp}(2n)$ ($n \geq 3$)、 D_n は $\mathfrak{so}(2n)$ ($n \geq 4$) である。

内積を用いると、ベクトル \mathbf{u} の長さは $|\mathbf{u}| := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ で定義される。リー群は内積、あるいはより一般に2次形式を不変にする変換のタイプによって次のように分類される。

3.1.1 ユニタリ群

内積 (3.2) を不変に保つ1次変換 $\mathbf{u}' = U\mathbf{u}$ をユニタリ変換という。変換行列を U とすると、

$$(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = (U\mathbf{u}, U\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, U^\dagger U\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.3)$$

よって内積が不変に保たれるための条件は

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1 \quad (3.4)$$

この条件を満たすユニタリ行列の全体は群をなし、ユニタリ群 (unitary group) といい、 $U(n)$ と表す。特に、行列式が1に限定されたユニタリ群は特殊ユニタリ群 (special unitary group) といい $SU(n)$ と書く。 $n \times n$ ユニタリ行列の成分は、成分が複素数なので $2n^2$ 個ある。条件 (3.4) は n^2 個の条件を課すので、独立な成分の個数は $2n^2 - n^2 = n^2$ 、特殊ユニタリ群の場合は $n^2 - 1$ である。たとえば $SU(2)$ の自由度は3、 $SU(3)$ の自由度は8である。パウリ行列が3個、ゲルマン行列が8個あるのはこれらの自由度に対応している。

ユニタリ行列を

$$U = e^{iX} \quad (3.5)$$

と書くと²、条件 (3.4) より $U^\dagger = U^{-1}$ 、これから

$$X^\dagger = X \quad (3.6)$$

が得られる。従って、ユニタリ群の生成元 X はエルミートである。特殊ユニタリ行列の場合は、行列式が1という条件から

$$\det U = \exp(\text{Tr} \ln U) = 1 \quad (3.7)$$

これから

$$\text{Tr} \ln U = i \text{Tr} X = 0 \quad (3.8)$$

²純虚数 i は便宜上つけた。この i はつける流儀とつけない流儀があるが、いずれの流儀でもコンシステントに用いれば問題ない。数学ではつけない流儀が普通であるが、量子論では、ユニタリ時間発展の例のようにつけると便利ことが多い。

従って、ユニタリ群のリー代数の元 X はトレースがゼロである。これをトレースレス (traceless) という。これと (3.6) を組み合わせると、 $SU(n)$ のリー代数はトレースレスの n 行 n 列エルミート行列 (Hermitian matrix) の全体であることがわかる³。

3.1.2 直交群

ユニタリ群は複素ベクトル空間における 1 次変換であるが、これを実ベクトル空間に限定したものを直交群 (orthogonal group) といい、 $O(n)$ と書く。実行列ではエルミート共役は転置行列になるので、(3.4) より直交行列 O は条件

$$O^T O = O O^T = 1 \quad (3.9)$$

を満足する。ここで、 T は転置行列 ($(O^T)_{ij} = O_{ji}$) を意味している。行列式が 1 に限定された直交群は特殊直交群といい $SO(n)$ と書く。(3.9) は $n(n+1)/2$ 個の条件を課すので、直交群の自由度は $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ である。例えば、 $SO(2)$ の自由度は 1 (1 つの軸周りの回転角)、 $SO(3)$ の自由度は 3 (3 つのオイラー角) である。 $SO(3)$ の自由度は、 $SU(2)$ の自由度と同じであることに注意しよう。両者のリー代数は同じであり、また、6.1.1 節で述べるように、後者は前者の普遍被覆群⁴ になっている。

直交群のリー代数は (3.9) から n 行 n 列の実交代行列

$$X^T = -X \quad (3.10)$$

の全体であることがわかる。

直交群を複素ベクトル空間に拡張したものを複素直交群といい、 $O(n, \mathbb{C})$ と書く。これは、 $\sum_i v_i^2$ ($v_i \in \mathbb{C}$) を不変に保つ線形変換群である。(ユニタリ群は $\sum_i |v_i|^2$ を不変に保つ。) 自由度の数は実直交群の 2 倍の $n(n-1)$ であり、リー代数の元は n 行 n 列の複素交代行列 (条件は (3.10) と同じ) の全体である。

3.1.3 シンプレクティック群

条件

$$A^T J A = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

³(3.5) で i をつけない流儀の場合は、エルミート交代行列 (Hermitian alternate matrix) $X^\dagger = -X$ となる。

⁴後に述べるように、単連結なリー群を普遍被覆群という。

を満足する $2n$ 行 $2n$ 列の実行列 A の全体の作る群をシンプレクティック群 (symplectic group)、あるいは、斜交群といい、 $\text{Sp}(2n, \mathbf{R})$ と書く。ここで、太字の 0 と 1 はそれぞれ n 行 n 列のゼロ行列と単位行列である。このとき A はシンプレクティック行列と呼ばれる。シンプレクティック行列は解析力学、正準量子化、ランダム行列など物理への応用範囲が広い。

n 行 n 列の行列 P, Q, R, S に対して、

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

とおくと、条件 (3.11) は次の条件と等価である。

$$P^T S - R^T Q = 1, \quad P^T R = R^T P, \quad Q^T S = S^T Q \quad (3.12)$$

これらは $n^2 + n(n-1)/2 \times 2 = n(2n-1)$ 個の条件式を課するので、シンプレクティック行列の自由度は $4n^2 - n(2n-1) = n(2n+1)$ である。特に、 $n=1$ の場合は、条件 (3.12) は A の行列式が 1 という条件に帰着する。したがって、行列式が 1 の 2 行 2 列行列はシンプレクティック行列である。

$A = e^{iX} \simeq 1 + iX$ と書いて (3.11) に代入すると、シンプレクティック群のリー代数の元 X が満足すべき関係式

$$X^T J + JX = 0 \quad (3.13)$$

が得られる。

シンプレクティック群は 2 次形式

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i,j=1}^{2n} x^i J_{ij} y^j = (x_1 y_{n+1} - x_{n+1} y_1) \\ &\quad + (x_2 y_{n+2} - x_{n+2} y_2) + \cdots + (x_n y_{2n} - x_{2n} y_n) \end{aligned} \quad (3.14)$$

を不変に保つ 1 次変換全体のなす群である。このことは、 x, y が (3.14) を満たせば、(3.11) より Ax, Ay もそれを満たすことからわかる。(3.14) で $x = y = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)^T$ とおけば、シンプレクティック群は正準交換関係を不変に保つ変換群であることが分かる。

3.1.4 ローレンツ群

4 次元の実ベクトル空間で内積が

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \quad (3.15)$$

で定義された空間をミンコフスキー空間 (Minkowski space) という。内積 (3.15) を不変に保つ 1 次変換をローレンツ変換といい、ローレンツ変換全体のなす群をローレンツ群という。

一般に、 $n + m$ 次元実ベクトル空間において

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m - x_{m+1} y_{m+1} - \cdots - x_{m+n} y_{m+n} \quad (3.16)$$

で定義された内積を不変に保つ 1 次変換の全体は群をなし、 $O(n, m)$ と書く。ローレンツ群は $O(3, 1)$ である。

ローレンツ群はミンコフスキー空間における内積 (3.15) を不変にする 1 次変換の全体である。そこで計量テンソル

$$g = (g_{ij}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

を導入すると、(3.15) は次のように書ける。

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^4 x^i g_{ij} y^j = (x, gy) \quad (3.18)$$

(3.17) をミンコフスキー計量という。これからミンコフスキー空間における内積を不変にする 1 次変換の行列 M は

$$M^T g M = g \quad (3.19)$$

を満足する正則行列であることが分かる。これら正則行列の全体がローレンツ群を形成する。 $M = e^{iX} \simeq 1 + iX$ と書くと、(3.18) よりローレンツ群のリー代数は

$$X^T g + g X = 0 \quad (3.20)$$

を満足することが分かる。

リー群とリー代数をまとめると表 3.1 のようになる。

3.2 リー代数の一般的性質

3.2.1 リー群とリー代数の関係

リー群 G の元 g は実の連続パラメータ $t := \{t_n\}$ ($n = 1, 2, \dots, d$) によって特徴づけられる: $g = g(t)$ 。ここで、群の単位元 1 にはパラメータ $t = 0$ (すなわち、 $t_1 = \dots = t_d = 0$) が対応しているものとしよう。

$$g(0) = 1 \quad (3.21)$$

表 3.1: 様々なリー群と対応するリー代数およびその次元。U(n)、SU(n)、O(n)、SO(n)、Sp(2n, R) はコンパクト群 (パラメータスペースが有界閉集合な群)、それ以外はノンコンパクト群である。

群の名称	記号	群の元	リー代数の元	次元
複素一般1次変換群	GL(n, C)	複素正則行列	任意の複素行列	2n ²
複素特殊1次変換群	SL(n, C)	行列式が1の複素正則行列	トレースがゼロの複素行列	2n ² - 2
実一般1次変換群	GL(n, R)	実正則行列	任意の実行列	n ²
実特殊1次変換群	SL(n, R)	行列式が1の実正則行列	トレースがゼロの実行列	n ² - 1
ユニタリ群	U(n)	ユニタリ行列	エルミート行列	n ²
特殊ユニタリ変換群	SU(n)	行列式が1のユニタリ行列	トレースがゼロのエルミート行列	n ² - 1
複素直交群	O(n, C)	複素直交行列	複素交代行列	n(n - 1)
直交群	O(n)	実直交行列	実交代行列	n(n - 1)/2
特殊直交群 (回転群)	SO(n)	行列式が1の直交行列	実交代行列	n(n - 1)/2
シンプレクティック群	Sp(2n, R)	2n 次実行列 A ^T JA = J	2n 次実交代行列 X ^T J + JX = 0	n(2n + 1)
ローレンツ群	O(3,1)	4 次実行列 A ^T gA = g	4 次実行列 X ^T g + gX = 0	6

この時、群の表現である線形演算子もまた同じパラメータによって記述され、 $D(t)$ と書かれる。(3.21) に対応して、表現 $D(t)$ は

$$D(0) = 1 \quad (3.22)$$

を満足するものとする。ここで、右辺の 1 は表現が n 次元の行列の時は n 行 n 列の単位行列である。 $D(t)$ を $t = 0$ の周りでテイラー展開すると

$$D(dt) = 1 + idt_n X_n + \cdots \quad (3.23)$$

ここで、2度現れる添え字については $n = 1, 2, \dots, d$ について和を取るアインシュタイン規約 (Einstein convention) に従うものとする。(3.23) に現れる X_n がリー群の生成子である。これから生成子は

$$X_n = -i \frac{\partial}{\partial t_n} D(t) \Big|_{t=0} \quad (n = 1, 2, \dots, d) \quad (3.24)$$

で与えられることがわかる。特に、ユニタリ表現に対しては X_n はエルミート演算子となる。有限の t に対するリー群の表現は無小変換 (3.23)

を繰り返し適用することによって得られ、

$$D(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{t_n}{N} X_n \right)^N = e^{it_n X_n} \quad (3.25)$$

で与えられる。

(3.24) から、リー代数はリー群の単位元近傍の局所的な性質によって決まることがわかる。逆に、リー代数はリー群の単位元を含む単連結部分の全体（これは普遍被覆群と呼ばれる）を決定する⁵。

次元が d の線形リー群は、 d 個のリー代数の元 X_1, \dots, X_d から構成され、リー群の各元 g は d 個のパラメータ t_1, \dots, t_d によって特徴づけられる。リー代数の任意の元 X から構成される e^{iX} はリー群 G の元であるが、 G の任意の元 g が $g = e^{iX}$ と表されるとは限らない。しかし、単位元の近くではそのようなことが可能である。このことを示そう。パラメータを $t_n = \lambda x_n$ とスケールし、 $\lambda = 0$ の時に $g(0) = 1$ となるようにする。 λ の微小変化に対して

$$g(\lambda + \delta\lambda) = g(\delta\lambda)g(\lambda) \quad (3.26)$$

と書ける。実際、群が閉じているためには $g(\lambda + \delta\lambda)g^{-1}(\lambda)$ は群の要素でなければならないが、今は群の要素は1つのパラメータで特徴づけられているのでそれは $g(\delta\lambda)$ と書かれるはずである。よって (3.26) が得られる。ここで、 $g(\delta\lambda) \simeq 1 + i\delta\lambda X$ と書けるので、

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = iXg(\lambda) \quad (3.27)$$

この解は

$$g(\lambda) = e^{i\lambda X} g(0) \quad (3.28)$$

で与えられる。 $g(0) = 1$ なので、線形リー群の単位元近傍の元は微小パラメータ t_n を用いて次のように書ける。

$$g = \exp(it_n X_n) \quad (3.29)$$

しかし、単位元の近傍にない元については必ずしも (3.29) のように書けるとは限らない。実際、 $SL(2, \mathbf{R})$ の元

$$g(t) = \begin{pmatrix} -e^t & 0 \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (3.30)$$

⁵そして、それに含まれる離散部分群を求めてそれに対する商群を作ることによって単連結でない部分を含む連結部分の全体も決定される。

は $SL(2, \mathbb{R})$ のリー代数の元 X を用いて $e^{i\lambda X}$ のように表すことはできない。この例のように群のパラメータの変域が無限区間にあるものはノンコンパクト群という。ノンコンパクト群の元は必ずしも $e^{i\lambda X}$ の形には書けない。パラメータ変域が有限な群をコンパクト群と言う。

直交群の場合は、その部分群である $SO(n)$ の元は常に (3.29) の形で書けるが、行列式が -1 の部分群はそのようには書けない。 $SO(n)$ は $O(n)$ の (単位元に連続的につながっているという意味で) 連結部分とも呼ばれる。(3.30) とは異なり、 $SO(2)$ の元

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

は $SO(2)$ の単位元に連結していることに注意しよう。実際、 $SO(2)$ の元を

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

と書くと、 $\theta = 0$ が単位元、 $\theta = \pi$ が (3.31) で、両者はパラメータ θ によって連続的に結び付いている。これは $SO(2)$ がコンパクト群であることによる。ただし、コンパクト群が必ずしも単連結であるとは限らない⁶。

3.2.2 構造定数

あるベクトル (t_1, t_2, \dots, t_d) が与えられたとき、パラメータ λ によって次のような一連の群の要素が生成される。

$$U(\lambda) = e^{i\lambda t_n X_n} \quad (3.33)$$

この群の要素の積の法則は

$$U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (3.34)$$

で与えられる。しかしながら、2つの互いに比例しないベクトル $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ と $(\beta_1, \dots, \beta_d)$ に対しては (3.34) は一般には成立しない。すなわち、

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} \neq e^{i(\alpha_a + \beta_a) X_a}. \quad (3.35)$$

群の要素が X_a の2次のオーダーまでで (3.33) の形で書けることを要請すると

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\gamma_a X_a} \quad (3.36)$$

⁶たとえば、 $SO(3)$ はコンパクト群であるが単連結ではない。

を満たすベクトル $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d)$ が存在しなければならない。そのための条件を調べるために次の量を計算しよう。

$$\begin{aligned} K &= e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1 \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + O(X^3) \end{aligned}$$

これから

$$K - \frac{1}{2}K^2 = i(\alpha_a + \beta_b)X_a - \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b[X_a, X_b] + O(X^3) \quad (3.37)$$

が得られる。他方、(3.36) の右辺から

$$\begin{aligned} K - \frac{1}{2}K^2 &= (e^{i\gamma_a X_a} - 1) - \frac{1}{2}(e^{i\gamma_a X_a} - 1)^2 \\ &= i\gamma_a X_a + O(X^3). \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.37) と (3.38) が矛盾しないためには

$$[X_a, X_b] = if_{abc}X_c \quad (3.39)$$

が成立し、かつ、

$$\gamma_a = \alpha_a + \beta_b - \frac{1}{2}\alpha_b\beta_c f_{abc} \quad (3.40)$$

であることが必要十分条件であることがわかる。(3.39) の f_{abc} は群の構造定数 (structure constant) と呼ばれる。 $[X_a, X_b] = -[X_b, X_a]$ から

$$f_{abc} = -f_{bac} \quad (3.41)$$

が成立することがわかる。

リー代数の構造は構造定数によって完全に決まる。また、連結リー群の性質も決まる。上記の導出からわかるように、構造定数は連続群が積に関して閉じているという要請によって決まり、その具体的な表現には依らない。

リー群のユニタリ表現が存在する場合は、構造定数は実数となる。実際、ユニタリ表現が存在するとき、リー代数 X_a はエルミートであることに注意すると

$$[X_a, X_b]^\dagger = -i(f_{abc})^* X_c = [X_b, X_a] = if_{bac}X_c = -if_{abc}X_c \quad (3.42)$$

が成立する。ここで、最後の等式では (3.41) を使った。それゆえ、

$$(f_{abc})^* = f_{abc} \quad (3.43)$$

すなわち、構造定数は実である。構造定数が完全反対称性 (3.96) を有していることは 3.2.8 節で示される。

任意のリー代数 X_a, X_b, X_c に対して成立するヤコビの恒等式 (Jacobi identity)

$$[X_c, [X_a, X_b]] + [X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] = 0 \quad (\text{ヤコビ恒等式})$$

に (3.39) を適用すると構造定数に対する次の関係式が得られる。

$$f_{abm}f_{cmn} + f_{bcm}f_{amn} + f_{cam}f_{bmn} = 0 \quad (3.44)$$

3.2.3 抽象リー代数

一般にベクトル空間 W に属する任意の 2 つの元 X, Y に対して交換子 $[X, Y] \in W$ が定義されており、次の 4 つの性質を満足する時、 W を抽象リー代数 (abstract Lie algebra) あるいはリー環 (Lie ring) という。

$$[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z] \quad (3.45)$$

$$[aX, Y] = a[X, Y] \quad (a \in \mathbf{R}) \quad (3.46)$$

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (3.47)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{ヤコビ恒等式}) \quad (3.48)$$

抽象リー代数には一般にはいくつかの連結した線形リー群が対応しているが、連結かつ単連結なリー群には一意に対応している。

3.2.4 カルタン計量

カルタン計量 (Cartan metric) は、2 つの構造定数の積を縮約することで定義される。

$$g_{ij} := f_{imn}f_{jnm} = g_{ji} \quad (3.49)$$

リー代数が可換な場合は構造定数がゼロになるのでカルタン計量もゼロである。後に示されるように、カルタン計量は正定値ではなく不定計量である。 g_{ij} を行列要素とする行列の行列式がゼロでない場合は、行列 (g_{ij}) の逆行列が存在するのでその成分を g^{ij} と書こう。逆行列の定義により

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_{ij} \quad (3.50)$$

が成立する。ここで、 δ_{ij} は $i = j$ の時 1、それ以外は 0 をとるクロネッカーのデルタ (Kronecker delta) である。これらを用いて構造定数の添え字を上げ下げすることができる。例えば、

$$f_{ij}{}^k = f_{ijl}g^{lk} \quad (3.51)$$

と定義される。

3.2.5 不変部分代数

リー代数 W の部分代数 (subalgebra) K とは、交換子をとる演算に関して閉じている W の部分空間をいう。すなわち、 $X, Y \in K$ ならば $[X, Y] \in K$ を満たす W の部分空間 K をいう。これから線形リー群 H が線形リー群 G の部分群ならば、 H のリー代数 K は G のリー代数 W の部分代数であると言える。

K をリー代数 W の部分代数とする。 $\forall X \in K$ と $\forall Y \in W$ に対して $[X, Y] \in K$ が成り立つとき、 K は不変部分代数 (invariant subalgebra) という。不変部分代数の元を指数の肩に乗せると、不変部分群が生成される。実際、 $\forall X \in K, \forall Y \in W$ に対して

$$h = e^{iX}, g = e^{iY} \quad (3.52)$$

とおくと、

$$g^{-1}hg = e^{-iY}e^{iX}e^{iY} =: e^{iX'} \quad (3.53)$$

なので

$$X' = -i \ln(e^{-iY}e^{iX}e^{iY}) = X + i[X, Y] + \frac{1}{2}[Y, [X, Y]] + \dots \quad (3.54)$$

が得られる。 $X \in K$ なので $[X, Y] \in K$ で、したがって、 $[Y, [X, Y]] \in K$ である。同様にして、右辺に現れる高次の項はすべて K に属することがいえるので $X' \in K$ となり、 $e^{iX'}$ は不変部分群に属することがわかる。 W 全体および空集合は自明な不変部分代数である。

2つのリー代数 K, L の任意の元 $\forall X \in K, \forall Y \in L$ が互いに可換な時は、 $X + Y$ の全体もまたリー代数を構成する。これを K と L の直和といい、 $W = K \oplus L$ と表す。リー代数 W に属するすべての元が互いに可換なとき、そのようなリー代数を可換リー代数、または、アーベリアン (Abelian) リー代数という。可換な線形リー群のリー代数はアーベリアンである。連結線形リー群とリー代数の間には、前者における直積が後者における和に対応する。以上のことから、次の定理が成立する。

Theorem 13 (1) 連結線形リー群 H が連結線形リー群 G の部分群であるための必要十分条件は、 H のリー代数 K が G のリー代数 W の部分代数であることである。

(2) 連結線形リー群 G の連結な部分群 H が G の不変部分群であるための必要十分条件は、 H のリー代数が G のリー代数 W の不変部分代数であることである。

- (3) 連結線形リー群 G が連結な部分群 H_1, H_2 の直積 $G = H_1 \times H_2$ ならば、 G のリー代数 W は H_1, H_2 のリー代数 K_1, K_2 の直和 $W = K_1 \oplus K_2$ に等しい。
- (4) 連結線形リー群 G が可換群であるための必要十分条件は、 G のリー代数 W がアーベリアンであることである。

Theorem 13 (3) については、逆は成立しない。例として、 $G = U(n)$ の部分群として $H_1 = \{\lambda I \mid |\lambda| = 1\}$ と $H_2 = SU(n)$ をとる ($n \geq 2$)。このとき、 G のリー代数は H_1 と H_2 のリー代数の直和に等しいが、 $G = H_1 \times H_2$ とはならない⁷。

リー代数 W のすべての元と可換な部分集合 S は可換な不変部分代数となる。実際、 S に属する任意の元 $X, Y \in S$ と W の任意の元 A について、 $[A, X] = [A, Y] = 0$ が成立し、ヤコビの恒等式より

$$[A, [X, Y]] = -[X, [Y, A]] - [Y, [A, X]] = 0 \quad (3.55)$$

が成立するので、 $[X, Y] \in S$ となり S は部分代数である。 S の定義より S の任意の元と W の任意の元の交換関係は 0 なので S に属する。それ故、 S は可換な不変部分代数である。 S を W の中心 (center) という。線形リー群 G の中心 Z のリー代数 S は、群 G のリー代数 W の中心である。

3.2.6 半単純リー代数、単純リー代数

可換な不変部分代数 (中心) を含まないリー代数を半単純リー代数 (semi-simple Lie algebra) という。また、自明でない、いかなる不変部分代数も含まないリー代数を単純リー代数 (simple Lie algebra) という。後に定理 15 で示すように、半単純リー代数は一般に単純リー代数の直和であることが示せる。これを示すための準備を行う。

リー代数 $W = \{X_1, X_2, \dots, X_d\}$ の不変部分代数を $K = \{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ ($r < d$) とする。 a または b が 1 以上 r 以下のとき、構造定数 f_{abc} が 0 でない値をとるのは $1 \leq c \leq r$ の場合のみとなる。したがって、カルタン計量

$$g_{ab} = f_{acd}f_{bdc} \quad (3.56)$$

において a または b が 1 以上 r 以下の時は、 c, d については $1, 2, \dots, r$ についての和をとればよい。特に、不変部分代数がアーベリアンの時は、 $g_{ab} = 0$ なので $\det(g_{ab}) = 0$ である。対偶をとって $\det(g_{ab}) \neq 0$ であれば、リー代数 W の不変部分代数はアーベリアンではなく、リー代数は半単純である。実はこの逆の主張も成立し、次の定理が成立する。

⁷ G は $H_1 \times H_2$ を位数 n の離散部分群で割ったものに等しい。このように、同じリー代数をもつ異なるリー群に関しては、3.3 章を参照せよ。

Theorem 14 リー代数が半単純であるための必要十分条件は、カルタン計量行列の行列式がゼロでない ($\det(g_{ab}) \neq 0$) ことである。

単純リー代数は、自明でない不変部分代数を持たないので半単純リー代数の特別な場合である。従って、 $\det(g_{ab}) \neq 0$ である。

生成子が一つだけからなる可換な不変部分代数は、群の $U(1)$ 因子と呼ばれる。この不変部分群に属する元は互いに可換だけでなく、考えているリー代数のすべての元と交換する⁸。物理的には $U(1)$ は位相変換を行う群である。 $U(1)$ 因子は可換なので、構造定数には反映されない。他方、後に示される定理 15 から可換な不変部分代数を含まない半単純なリー代数は、単純リー代数の直和で表される。単純リー代数においては、異なる生成子の交換関係がゼロでなく、構造定数の巡回性 (cyclic property) により、あらゆる生成子は生成子の交換関係の線形結合で表され、係数は構造定数によって決定される。こうして、構造定数は単純リー代数の代数構造と表現を決定する。このことについて以下で調べよう。

なお、定理 14 の完全な証明には多くの準備を要する。詳細は

James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* (Springer, 1972)

などを参照せよ。

また、本講義ノートではコンパクトリー代数のみを取り扱っている⁹が、上記の本では一般の半単純なリー代数を取り扱っている。

3.2.7 キリング形式

リー代数 $A = a^i X_i$, $B = b^i X_i$ の双一次形式をカルタン計量を用いて次のように定義する。

$$(A, B) \equiv (a, b) := g_{ij} a^i b^j \quad (3.57)$$

これをキリング形式 (Killing form) という。これからカルタン計量はキリング形式を用いて次のように書けることがわかる。

$$g_{ij} = (X_i, X_j) \quad (3.58)$$

⁸実際、 $X \in \mathfrak{K}$, $Y \in \mathfrak{W}$ とすると、不変部分代数の性質より $[X, Y] = if_{XYZ} Z$ ($Z \in \mathfrak{K}$) となるが、 $U(1)$ 因子の場合 \mathfrak{K} の元は X のみなので、 $Z = X$ である。ところが、後に示される構造定数の完全反対称性 (3.96) より $f_{XYX} = 0$ となる。よって、 $[X, Y] = 0$ となり、 $U(1)$ 因子の元は考えているリー代数のすべての元と交換する。

⁹任意の半単純リー代数は、複素数に拡張すればコンパクトリー代数と等価になる。

キリング形式はリー代数の基底の取り方に依らない(これを示してみよ)。後に示す構造定数の対称性から、リー代数 A, B, C とキリング形式の間に次の関係式が成立することが分かる。

$$(A, [B, C]) = (B, [C, A]) = (C, [A, B]) = ig_{kn}f_{nlm}a^k b^l c^m \quad (3.59)$$

以上で準備は整ったので、半単純リー代数が単純リー代数の直和であることを示そう。

Theorem 15 半単純リー代数は単純リー代数の直和で書ける。

証明 まず、半単純リー代数とは可換な不変部分代数を含まないリー代数であることを思い出そう。したがって、一般には可換でない不変部分代数を含む。そこで、半単純リー代数 W の可換でない不変部分リー代数 K の任意の元 B とカルタン計量の下で直交する W の元の集合を K^\perp と書こう。

$$K^\perp := \{A \in W \mid (A, B) = 0, \forall B \in K\} \quad (3.60)$$

K^\perp を K の直交補空間 (orthogonal complement) という。また、ベクトル空間として $W = K + K^\perp$ である。 $A \in K^\perp, B \in K, C \in W$ とすると、 K は不変部分代数だから $[B, C] \in K$ であることに注意して (3.59) を適用すると

$$(B, [C, A]) = (C, [A, B]) = (A, [B, C]) = 0 \quad (3.61)$$

である。ここで、 $A \in K^\perp, [B, C] \in K$ なので最後の等式が成立する。したがって $(B, [C, A]) = 0$ となり、 $[C, A] \in K^\perp$ が結論できる。それゆえ、 K^\perp もまた不変部分代数であることが分かる。次に、 $(C, [A, B]) = 0$ より $[A, B]$ は W のすべての元と直交していることが分かる。定理 14 より半単純リー代数のカルタン計量の行列式はゼロでない。下に示すように、ベクトル空間 W の計量が $\det g \neq 0$ である時、 W のすべての元と直交する元は 0 しかないので、 $[A, B] = 0$ と結論できる。従って、 W は K と K^\perp の直和であることが分かる。 K も K^\perp も共に不変部分代数なので、半単純リー代数 W はその不変部分代数の直和に分解できることが分かった。 K あるいは K^\perp がさらにその不変部分代数を含んでいるときには、同じ議論をくりかえることでそれ以上自明でない不変部分代数を含まない部分代数、すなわち、単純リー代数の直和に分解できる。最後に、ベクトル空間 W が $\det g \neq 0$ のとき、 W のすべての元と直交する元は 0 であることを示そう。 W の基底を $X_i (i = 1, \dots, d)$ とすると、 $(X_i, X) = 0 (i = 1, \dots, d)$ ならば $X = 0$ が言えればよい。 X を基底で $X = \sum_{i=1}^d x^i X_i$ と展開すると、

$$(X_i, X) = \sum_{j=1}^d x^j (X_i, X_j) = \sum_{j=1}^d g_{ij} x^j = 0 \quad (3.62)$$

g は逆行列を持つのですべての x^i がゼロでなければならない。ゆえに $X = 0$ である。(証明終)

3.2.8 リー代数の随伴表現

群 G の表現とは G から $GL(n, \mathbb{C})$ への準同型写像 D のことであった。すなわち、群 G の各元 g に $n \times n$ の正則行列 $D(g)$ が対応しており、群 G と同じ積の法則を満足する行列の集合 $\{D(g)\}$ が群 G の表現である。

一般に、リー群とその表現との対応が 1:1 の場合、すなわち、同型写像の場合は、忠実な表現 (faithful representation) という。

同様に、リー代数 W から $gl(n, \mathbb{C})$ への準同型写像 ρ をリー代数の表現という。リー代数の元 A に対応する表現 $\rho(A)$ が作用するベクトル空間は表現空間とよばれ、その次元 d が表現の次元である。特に、リー代数の基底 X_i の表現 $\rho(X_i)$ はリー代数の基底そのものと同じ交換関係

$$[\rho(X_k), \rho(X_l)] = if_{klm}\rho(X_m) \quad (3.63)$$

を満足する。随伴表現の行列がリー代数の基底と同じ交換関係を満足することを確かめよう。(3.39) より

$$[X_a, [X_b, X_c]] = if_{bcd}[X_a, X_d] = -f_{bcd}f_{ade}X_e. \quad (3.64)$$

これを用いてヤコビの恒等式 (3.48) を構造定数で表すと

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{cad}f_{bde} + f_{abd}f_{cde} = 0. \quad (3.65)$$

となる。随伴表現の行列要素は (3.73) から

$$\text{ad}(X_a)_{bc} = \rho(X_a)_{bc} \equiv -if_{abc} \quad (3.66)$$

なので、(3.65) を $\rho(X_a)$ で表すために、まず (3.65) を

$$-f_{acd}f_{bde} + f_{bcd}f_{ade} = f_{abd}f_{dce} \quad (3.67)$$

と書いて、これを (3.66) を用いて書きなおすと

$$\rho(X_a)_{cd}\rho(X_b)_{de} - \rho(X_b)_{cd}\rho(X_a)_{de} = if_{abd}\rho(X_d)_{ce} \quad (3.68)$$

が得られる。よって

$$[\rho(X_a), \rho(X_b)] = if_{abc}\rho(X_c) \quad (3.69)$$

が得られる。こうして、随伴表現の行列がリー代数の基底と同じ交換関係を満足していることが分かる。

コンパクトリー群の単位元と連結されている元は (3.29) のようにリー代数によって与えられるので、その表現 D は後に述べる (3.100) により、リー代数の表現 ρ を用いて次のように書ける。

$$D(g) = \exp(it_n \rho(X_n)) \quad (3.70)$$

表現行列 $\rho(X_i)$ の行列成分を構造定数 f_{ijk} を用いて

$$\{\rho(X_i)\}_{jk} = -if_{ijk} = -\{\rho(X_i)\}_{kj} \quad (3.71)$$

と与えることで、リー代数の表現を得ることができる。これをリー代数の随伴表現 (adjoint representation) といい、 $\text{ad}(X_i)$ と表記する。

$$\text{ad}(X_i) := \rho(X_i) \quad (3.72)$$

あるいは、行列要素で表示すると (3.71) を用いることで

$$\{\text{ad}(X_i)\}_{jk} = -\{\text{ad}(X_i)\}_{kj} = \{\rho(X_i)\}_{jk} = -if_{ijk} \quad (3.73)$$

と書ける。これを (3.63) に代入するとヤコビの恒等式 (3.44) が再現されることが確かめられる。

随伴表現を用いるとカルタン計量とキリング形式は次のように書ける。

$$g_{ij} = -\text{Tr}\{\text{ad}(X_i)\text{ad}(X_j)\} \quad (3.74)$$

$$(A, B) = -\text{Tr}\{\text{ad}(A)\text{ad}(B)\} \quad (3.75)$$

実際、 $\text{ad}(X_i)$ の行列要素が $\{\text{ad}(X_i)\}_{mn} = -if_{imn}$ で与えられることに注意すると、(3.74) の右辺は (3.49) に一致することがわかる。また、 $A = a^i X_i$ 、 $B = b^j X_j$ とおくと、(3.75) の右辺は

$$\begin{aligned} -\text{Tr}\{\text{ad}(A)\text{ad}(B)\} &= -a^i b^j \text{Tr}\{\text{ad}(X_i)\text{ad}(X_j)\} \\ &= a^i b^j f_{imn} f_{jnm} = a^i b^j g_{ij} \\ &= (A, B) \end{aligned} \quad (3.76)$$

となり、左辺に等しくなることがわかる。(3.74) はカルタン計量が随伴表現の積のトレースで書けることを示している。トレースの巡回性 (cyclic property of the trace) により、この行列は対称行列であることが分かる。

随伴表現はリー代数の中心を除いて忠実な表現となっている。中心はリー代数のすべての元と可換な不変部分代数の任意の元 X からなるので、構造定数はゼロであり、したがって、 $\text{ad}(X)=0$ となるからである。半単純リー代数は中心を持たないので、その随伴表現は忠実である。リー代数の随伴表現が与えられた時に、(3.70) で $\rho(X_i) = \text{ad}(X_i)$ とおくことに

よってリー群の表現が得られる。これをリー群 G の随伴表現 $\text{Ad}(G)$ という¹⁰。これは群の中心 Z を除いて忠実な表現となっている。 $g \in Z$ に対しては、 $\text{Ad}(G)=1$ となるから、中心 Z は準同型写像 $G \rightarrow \text{Ad}(G)$ の核である。従って、準同型定理 2 により

$$\text{Ad}(G) \cong G/Z \quad (3.77)$$

である。

リー代数 $X = x^i X_i, Y = y^i X_i, A = a^i X_i$ を定義すると

$$\begin{aligned} (Y, \text{ad}(A)X) &:= y^i g_{ij} \{\text{ad}(A)\}_{jk} x^k \\ &= y^i g_{ij} a^l x^k \{\text{ad}(X_l)\}_{jk} \\ &= i y^i g_{ij} a^l x^k f_{lkj} \\ &= y^i a^l x^k (X_i, i f_{lkj} X_j) \\ &= (Y, [A, X]) \end{aligned}$$

よって

$$(Y, \text{ad}(A)X) \equiv (y, \text{ad}(A)x) = (Y, [A, X]) \quad (3.78)$$

が成立する。これにより随伴表現を

$$\text{ad}(A)X \equiv [A, X] \quad (3.79)$$

と定義することもできる¹¹。

例 $\text{SO}(3)$ リー代数 X_i と随伴表現 $\text{ad}(X_i)$ は同じで

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

で与えられる。行列を直接計算することで $[X_1, X_2] = -X_3 = i^2 X_3$ が得られる。よって、 $f_{123} = i$ であることがわかる。他の交換関係も同様に計算でき、これから構造定数、カルタン計量は

$$f_{ijk} = i\epsilon_{ijk} \quad (3.81)$$

$$g_{ij} = 2\delta_{ij} \quad (3.82)$$

$$\det g = 8 \neq 0 \quad (3.83)$$

¹⁰リー代数の随伴表現を ad 、リー群の随伴表現を Ad と大文字と小文字を使い分けていることに注意。

¹¹不定計量であっても、それがゼロ固有値を持たない場合は、 $(Y, A) = (Y, B)$ がすべての Y に対して成り立てば、 $A = B$ が成立する。

で与えられる。よって、定理 14 より $SO(3)$ のリー代数は半単純である。実際には、 $SO(3)$ は不変部分代数を含まないので単純である。

Theorem 16 単純リー群の随伴表現は既約である。

これを証明するために、対偶 (contraposition) を示す。すなわち、与えられた随伴表現が可約ならば、不変部分空間が存在しなければならない。随伴表現の空間は生成子の空間であるので、随伴表現が可約であるということは、生成子の張る空間が部分空間をもつことを意味している。そこで、部分空間に対応する基底を X_i ($i = 1, \dots, k$)、それ以外の基底を X_j ($j = k + 1, \dots, d$) としよう。前者が不変部分空間であるためには

$$\{\text{ad}(X_l)\}_{ij} = -if_{lij} = 0 \quad (3.84)$$

が任意の $i = 1, \dots, k$, $j = k + 1, \dots, d$, $l = 1, \dots, d$ に対して成立しなければならない¹²。構造定数は完全反対称なので、構造定数のうちでそのような i と j を含むものはゼロになる。したがって、構造のうちでゼロで無いのは添え字が 3 つとも $i = 1, \dots, k$ か $j = k + 1, \dots, d$ の場合のみである。それゆえ、リー代数は 2 つの自明でない不変部分代数に分解されることになり、単純ではない。よって、単純リー代数の随伴表現は既約である。

随伴表現の次元は、リー代数が作用する線形空間の次元に等しい。すなわち、リー代数の独立な基底の数に等しい。構造定数が実数 (純虚数) の場合は、随伴表現の生成子は純虚数 (実数) である。

ここで、次のような基底の変換を考える。

$$X'_a = L_{ab}X_b. \quad (3.85)$$

$\delta_{gc} = (L^{-1}L)_{gc} = L_{gh}^{-1}L_{hc}$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} [X'_a, X'_b] &= L_{ad}L_{be}[X_d, X_e] = iL_{ad}L_{be}f_{dec}X_c = iL_{ad}L_{be}f_{deg}L_{gh}^{-1}L_{hc}X_c \\ &= iL_{ad}L_{be}f_{deg}L_{gc}^{-1}X'_c \end{aligned} \quad (3.86)$$

よって、基底変換 (3.85) に伴い、構造定数が次のように変換されることが分かる。

$$f'_{abc} = iL_{ad}L_{be}f_{deg}L_{gc}^{-1}. \quad (3.87)$$

随伴表現の定義式 (3.66) を比較すると、基底変換に伴って随伴表現が次のように変換されることが分かる。

$$\rho(X'_a)_{bc} = L_{ad}L_{be}\rho(X_d)_{eg}L_{gc}^{-1} \quad (3.88)$$

¹² X_i が不変部分空間 K の元とすると、任意の基底 X_l に対して、 $[X_l, X_i] = if_{lij}X_j \in K$ となるので、 $j = k + 1, \dots, d$ ならば $f_{lij} = 0$ でなければならない。よって (3.84) が成立する。

(行列要素ではなく) 行列の形で書くと

$$\rho(X'_a) = L_{ad}L\rho(X_d)L^{-1}. \quad (3.89)$$

このように、基底変換に伴って、随伴表現には相似変換 (similarity transformation) と生成子の基底の変換が同時に行われる。同様に、カルタン計量の変換則は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} g'_{ab} &= -\text{Tr}\{\text{ad}(X'_a)\text{ad}(X'_b)\} = -L_{ac}L_{bd}\text{Tr}(L\rho(X_c)L^{-1}L\rho(X_d)L^{-1}) \\ &= -L_{ac}\text{Tr}\{\text{ad}(X_c)\text{ad}(X_d)\}L_{db}^T \\ &= L_{ac}g_{cd}L_{db}^T \end{aligned} \quad (3.90)$$

2行目に移る際に、トレースの循環性を用いた。

カルタン行列 (3.74) は実対称行列なので対角化可能であり、固有値は実数で、かつ、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。(3.90) から、適当な直交行列 L をとることによってそのような対角化が実行できることが分かる。こうして

$$g_{ab} = k^a \delta_{ab} \quad (3.91)$$

が得られる。ここでは右辺で a についての和はとらない。 L をスケール変換することによって k^a の大きさを 1 にすることはできるが、符号は変えることができない ((3.90) には L が 2 個出てくるため)。この性質を利用してリー代数を k_a の符号により分類することができる。 $k^a > 0$ なるリー代数をコンパクトリー代数 (compact Lie algebra) である。他方、 $k^a < 0$ なる成分を持つリー代数は非自明な有限次元のユニタリ表現を持たない。ローレンツ群は $k_a < 0$ である。

適当なスケール変換をすることで

$$\text{Tr}\{\text{ad}(X_a)\text{ad}(X_b)\} = -g\delta_{ab}, \quad g > 0 \quad (3.92)$$

ととることができる。このとき、構造定数は次のように表される。まず、(3.69) に (3.71) と (3.72) を代入すると、

$$[\text{ad}(X_a), \text{ad}(X_b)] = if_{abc}\text{ad}(X_c) \quad (3.93)$$

が得られる。この両辺に $\text{ad}(X_c)$ を掛けてトレースをとり、(3.92) を用いると

$$\begin{aligned} f_{abc} &= -ig^{-1}\text{Tr}\{[\text{ad}(X_a), \text{ad}(X_b)]\text{ad}(X_c)\} \\ &= -ig^{-1}\text{Tr}\{[\text{ad}(X_b), \text{ad}(X_c)]\text{ad}(X_a)\} \end{aligned} \quad (3.94)$$

が得られる。最後の等式はトレースの巡回性から示される。(3.94) から

$$f_{abc} = f_{bca} \quad (3.95)$$

が言える。この結果と (3.41) から構造定数が次の完全反対称性を満足することが分かる。

$$f_{abc} = f_{bca} = f_{cab} = -f_{bac} = -f_{acb} = -f_{cba} \quad (3.96)$$

3.3 リー群の諸定理

群 G の元 g とパラメータの連続変化でつながっている部分を連結部分といい $C(g)$ と表す。連結部分はその中の一つの元を代表として指定すれば定まるので、 $C(g_1)$ と $C(g_2)$ は一致しているか互いに共通元を持たないかのどちらかである。従って、リー群は互いに重なり合わない連結部分の集合からなる。特に、連結部分の任意の2点を選んだ時に、その2点を結ぶすべての曲線が互いに連続的に移り変わることができる時(あるいは、任意のループが連続的に1点に収縮できるとき)、 G は単連結であるという。 $GL(n, \mathbf{C})$, $SL(n, \mathbf{C}/\mathbf{R})$, $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(2n, \mathbf{R})$ はただ一つの連結部分からなる。このうち、 $SL(n, \mathbf{C}/\mathbf{R})$, $SU(n)$, $Sp(2n, \mathbf{R})$ は単連結である。

線形リー群 G の単位元を含む連結部分を G_0 と書くと、次の定理が成立する。

Theorem 17 G_0 は G の不変部分群である。

証明 G_0 の任意の2つの元 g_a, g_b をとり、それらと単位元 e を結ぶ G 内の曲線をそれぞれ $f_a(t), f_b(t)$ とすると、 $f_a(0) = f_b(0) = e$ でかつ $f_a(1) = g_a, f_b(1) = g_b$ である。そこで、 $h(t) := f_a(t)f_b(t)^{-1}$ を定義すると、 $h(t)$ もまた G 内の曲線で、 $h(0) = e, h(1) = g_a(g_b)^{-1}$ である。従って、単位元と連続曲線でつながっている $g_a(g_b)^{-1}$ は G_0 の要素なので、 G_0 は G の部分群である¹³。次に、 G_0 が G の不変部分群であることを示す。これは任意の $g \in G$ に対して $gG_0g^{-1} = G_0$ が成立することである。 G_0 の任意の元 g と上に導入した曲線 $f_a(t)$ に対して、 $\tilde{f}_a(t) := gf_a(t)g^{-1}$ を定義すると、これは連続曲線であり、 $\tilde{f}_a(0) = e \in G_0$ なので $\tilde{f}_a(1) = gg_a g^{-1}$ も G_0 に属する ($\tilde{f}_a(t)$ が連続曲線なので)。よって、 $gG_0g^{-1} = G_0$ が成立し、 G_0 は G の不変部分群であることが分かる。

¹³ H が G の部分群であるための同値の定義「 $\forall g, \forall h \in H$ に対して $gh^{-1} \in H$ ならば、 H は G の部分群である」を思いだそう。

Theorem 18 G の元 g を含む連結部分 $C(g)$ は $C(g) = gG_0 = G_0g$ と書ける。

証明 $gG_0 = G_0g$ は G_0 が不変部分群であることによる (定理 17)。 G_0 の任意の元 g_a と単位元を結ぶ G 内の連続曲線 $f_a(t)$ をとり、 $h(t) := gf_a(t)$ を定義すると、 $h(0) = g, h(1) = gg_a$ なので、 gg_a は g と G 内で連続的に結ばれている。 よって、 $gG_0 \subset C(g)$ である。 逆に、 $C(g)$ の任意の元 c と g を連続的に結ぶ曲線 $k(t)$ を選び ($k(0) = g, k(1) = c$)、 $\tilde{k}(t) := g^{-1}k(t)$ を定義すると $\tilde{k}(0) = e, \tilde{k}(1) = g^{-1}c$ なので、 $g^{-1}c \in G_0$ 、 すなわち、 $c \in gG_0$ となる。 従って、 $C(g) \subset gG_0$ なので、 $C(g) = gG_0$ が示された。

定理 18 より、 リー群 G は同値類の直和に分解できることが分かる。

$$G = g_1G_0 \oplus g_2G_0 \oplus \cdots \oplus g_nG_0 \quad (3.97)$$

g_1, \dots, g_n のうちの一つは単位元である。 また、 定理 17 より G_0 は不変部分群なので、 商群

$$G/G_0 = \{g_1G_0, g_2G_0, \dots, g_nG_0\} \quad (3.98)$$

が導入できることが分かる。

Theorem 19 G_0 は線形リー群であり、 そのリー代数は G のリー代数と同じである。

証明 G_0 は線形リー群 G の部分群なので、 それ自身が線形リー群である。 G_0 の単位元とその近傍は G のそれと一致しているので、 両者の無限小変換の生成子であるリー代数も一致する。

この定理から $O(n)$ と $SO(n)$ が同一のリー代数を持つことが分かる。 以下、 いくつかの重要な定理を証明抜きで与えよう。 詳しくはこの講義ノートの冒頭で紹介したリー群の教科書などを参照のこと。

線形リー群の単位元近傍の元はリー代数の元 X を用いて e^{iX} と書けるが、 単位元近傍以外の元については次の定理が成立する。

Theorem 20 (i) 連結な線形リー群、あるいは、一般の線形リー群の単位元を含む連結成分の任意の元 g は、 そのリー代数の有限個の元 X_1, X_2, \dots, X_n を用いて次のように表せる (ただし、表現の仕方が一意とは限らない)。

$$g = e^{iX_1} e^{iX_2} \cdots e^{iX_n} \quad (3.99)$$

(ii) コンパクトで連結な線形リー群 G の任意の元 g はそのリー代数の適当な元 X を用いて e^{iX} と表せる。従って、リー代数の基底を X_1, \dots, X_d とすると、適当な実数パラメータ t_1, \dots, t_d を用いて

$$g = \exp \left(i \sum_{i=1}^d t_i X_i \right) \quad (3.100)$$

と表せる。

具体的には、 $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(2n, \mathbf{R})$ は連結なコンパクト群であり、その元は (3.100) のように表すことができる。

以上のようにリー群の元は (3.99) や (3.100) のように書けるが、今度は逆の問題を考える。すなわち、(3.45)-(3.48) を満足する抽象リー代数が与えられた時、対応するリー群はどの程度定まるだろうか。

Theorem 21 抽象リー代数が与えられると、それに対応する単連結な線形リー群が一意に定まる。

この単連結な線形リー群を普遍被覆群 (universal covering group) という。

Theorem 22 与えられた抽象リー代数に対応する普遍被覆群 \tilde{G} の適当な離散的な不変部分群 Z を選ぶと、同じ抽象リー代数をもつ連結リー群 G は商群 \tilde{G}/Z と同型になる。

$$G \cong \tilde{G}/Z. \quad (3.101)$$

この定理から、ある抽象リー代数から構成される連結リー群は、不変部分群に含まれるすべての離散的な不変部分群を求めることで与えられることが分かる。

例として、2次元回転群 $SO(2)$ を考える。この1次元表現は $R(x) = e^{it}$ ($0 \leq t < 2\pi$) で1次元抽象リー代数は1で生成される ((3.100) 式と比較せよ)。 $t = 2\pi$ は $t = 0$ と同一視されるので、 $SO(2)$ のパラメータ空間は単連結ではない。この1次元抽象リー代数に対応した普遍被覆群は1次元の並進群である。これは加法群 \mathbf{R} に等しく、1次元表現 $T(x) = e^{ix}$ ($-\infty < x < \infty$) をもつ。抽象リー代数はやはり1で生成される。 E_1 のパラメータ空間を 2π で分割して、

$$\{2\pi n \leq x < 2\pi(n+1), n = 0, \pm 1, \dots\} \rightarrow \{0 \leq t < 2\pi, x = 2\pi n + t\}$$

なる対応を考えると、これは E_1 から $SO(2)$ への準同型写像であり、 $Z := \{x = 2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ はその核である。よって、準同型定理により $E_1/Z \cong SO(2)$ であることが分かる。

第4章 リー群と多様体

物理学では電磁場など物理的な実体に合わせていろいろな場が登場する。そのような場は数学の多様体で記述される。物理に要求される重要な性質としては、時間や空間などの(局所)座標系が導入可能なことであり、また、ある時空点の近傍という概念も頻出する。そのような都合の良い性質を持った空間は、数学ではハウスドルフ空間 (Hausdorff space) という¹。更に、完備性²を満たす線形空間はバナッハ空間 (Banach space) と呼ばれる。物理学ではいろいろな物理量を測り、その結果を定量化する必要がある。そのために必要なことは、まず第一に時間と空間の座標系を導入することである。ニュートン力学ではユークリッド空間、特殊相対論ではミンコフスキー空間がその役割を果たすが、一般相対論ではグローバルな座標系を導入することができないので、局所的な座標系を導入する必要がある。そのために必要な数学的な道具立てのうち、リー群の応用という観点から必要な概念について概説する。

4.1 位相空間 (topological space)

集合 M の開部分集合からなる族 (family)³ Γ が次の 3 条件を満足するものとしよう。

- 全体集合 M と空集合 \emptyset は Γ に属する。
- $U_1, U_2 \in \Gamma$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \Gamma$ 。
- $U_i \in \Gamma$ ($i = 1, 2, \dots$) ならば $\bigcup_i U_i \in \Gamma$ である。ここで、 i の数は無限個あってもよい。

¹ハウスドルフ空間は、それに属する任意の異なった 2 点 x, y に対して、互いに共通部分をもたないような開近傍 U_x, U_y を選ぶことができる空間として定義される。ハウスドルフ空間は、点列の極限の一意性という重要な性質を有し、距離空間という物理で重要な位相空間を含んでいる。さらに、任意の位相空間はハウスドルフ空間の商空間として実現できる。

²距離空間が完備であるとは、その空間内の任意のコーシー列 ($\lim_{m, n \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = 0$ なる数列) が収束することを意味する。

³族とは与えられた性質を持つ、添字によって順序づけられている元の集合をいう。

この時、集合 M に Γ の元を開集合とする位相が定まると言う。また、組 (M, Γ) は、 M を台集合、 Γ を開部分集合族とする位相空間と呼ばれる。 $\emptyset \in \Gamma$ と $M \in \Gamma$ はそれぞれ2番目と3番目の条件が常に成立するために必要である。リー群の元の集合は位相空間となっており、位相群 (topological group) の例である。

M の点 P を含む開集合を P の開近傍という。点 P の開近傍の全体を $\Sigma(P)$ と書き、点 P の開近傍系という。位相空間の任意の異なる2点が互いに交わらない開近傍を持つ時、このような位相空間をハウスドルフ空間 (Hausdorff space) という。これは、相異なる2点を開集合を用いて区別できることを意味する⁴。また、位相空間を2つ以上の空でない開集合に分割できるとき、この位相空間は非連結 (disconnected) であるといい、そのような分割ができないとき連結 (connected) であるという。

ハウスドルフ空間では異なる2点をむすぶ曲線が無限に分割でき、この意味で位相空間は連続的である。このような性質は、物理では通常仮定されることである。しかし、格子ゲージ理論のように時空が離散的であるような状況を考えると連結性が失われる。

台集合 M の開部分集合族 $\Gamma(M)$ に属するすべての集合の和集合が M に等しいとき、 $\Gamma(M)$ を集合 M の開被覆 (open cover) であるという。位相空間 M の任意の開被覆が与えられた時、 M をその開被覆に属する有限個の集合で覆うことができるならば、この位相空間はコンパクト (compact) であるという。

位相空間が局所コンパクト (locally compact) であるとは、各点の周りにコンパクト近傍、すなわちある開近傍をふくむコンパクト集合が存在することをいう。リー群は局所コンパクトである。

4.2 微分可能多様体

次に、多様体上にどのように局所座標系を導入するかを考えよう。ハウスドルフ空間 M の各点の開近傍から \mathbb{R}^n の開集合の上へ同相写像⁵が存在する時、空間 M を n 次元多様体という。 M の点 P が \mathbb{R}^n の点 $(x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P))$ に写像される時、 $x^i(P)$ を点 P の座標の第 i 成分という。このように、空間の各点ごとに局所的な座標が導入できる連続空間が多様体である。連続群の元は連続的なパラメータで特徴づけることができるので、連続群の元の集合は多様体である。すべての関数が座標について

⁴一般の位相空間では、極限の一意性が保証されていないので、近傍という概念を用いてそれを保証する公理が必要であり、それを分離公理 (axiom of separation) という。分離公理には、コルモゴロフ、フレッシュ、ハウスドルフによるものが有名であるが、ここに述べたハウスドルフの公理が使いやすいのでよく仮定される。

⁵全単射な連続写像で、逆もまた連続な写像を同相写像という。

無限回微分可能な多様体を微分可能多様体 (differentiable manifold) という。時空の各点にユークリッド空間の開集合と同相な開近傍を持つ位相空間を導入し、更に、ハウスドルフ性や微分可能性を仮定することで局所的に微分や積分が定義できるようになるのである。物理では通常そのような多様体の存在を暗に仮定している。

多様体 M 上の関数 $f(P)$ ($P \in M$) が微分可能というのは、 f を点 P の座標の関数と考えたときに、その関数が微分可能ということである。この条件は局所座標系の取り方には依らない。微分可能多様体 M から微分可能多様体 N の上への 1 対 1 の無限回微分可能な写像 ϕ とその逆 ϕ^{-1} もまた無限回微分可能であるとき、 ϕ を微分同相写像 (diffeomorphism) といい、 M と N は微分同相 (diffeomorphic) であるという。2 つの微分可能多様体 が同相であるとき、一方から他方へなめらかな変形によって移り変わることができる。

4.3 接空間

微分可能多様体 M 上の点 P の座標を (x^1, \dots, x^n) とする。点 P を通る曲線は $(x^1(u), \dots, x^n(u))$ のように 1 変数 u でパラメトライズできる。この時、微分可能な関数 $f(x^1, \dots, x^n)$ を考え、点 P を通る曲線に沿った関数の値 $f(x^1(u), \dots, x^n(u))$ を考える。関数 f の曲線に沿った方向微分は

$$\frac{df}{du} = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{du} \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (4.1)$$

で与えられる。これは任意の微分可能関数 f に対して成立するので

$$\frac{d}{du} = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{du} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.2)$$

と書くことができる。(4.2) は接ベクトル d/du を基底 $\{\partial/\partial x^i\}$ で展開した時の i 番目の基底 $\partial/\partial x^i$ の係数が dx^i/du であることを示している。 d/du は曲線 $x^i(u)$ の接ベクトルであるという。

点 P を通る別な曲線 $x^i(v)$ についても同様に

$$\frac{d}{dv} = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dv} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.3)$$

と書くことができる。この時、 d/du と d/dv の任意の線形結合もまた点 P を通るある曲線の接ベクトルである。実際、

$$a \frac{d}{du} + b \frac{d}{dv} = \sum_{i=1}^n \left(a \frac{dx^i}{du} + b \frac{dx^i}{dv} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{d}{ds} \quad (4.4)$$

と書ける ($s = (1/a)u + (1/b)v$)。こうして微分可能多様体の任意の点 P における接ベクトルの集合はベクトル空間を構成する。これを P における接空間 (tangent space)、あるいは、接ベクトル空間 (tangent vector space) といい、 $T_P(M)$ で表す。 $T_P(M)$ の基底は $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ であり、接ベクトルの i 番目の成分は dx^i/dt である (t は曲線の特徴づけるパラメータ)。接空間の次元は多様体の次元 n と同じである。

微分可能多様体 M の各点 P に対して、接ベクトル $X_P \in T_P(M)$ を対応させる写像をベクトル場 (vector field) という。ベクトル場の成分が $v^i(P)$ の時、ベクトル場は

$$X_P = \sum_{i=1}^n v^i(P) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.5)$$

と表される。ここで係数 $v^i(P)$ が微分可能であるとき、ベクトル場は微分可能であるという。

リー群

$$G = \left\{ \exp \left(i \sum_{i=1}^d x^i X_i \right) \right\} \quad (4.6)$$

の中の単位元を通る曲線

$$g(t) := \exp \left(it \sum_{i=1}^d c^i X_i \right) \quad (4.7)$$

を考える⁶。単位元 $g(t=0)$ におけるこの曲線の接ベクトル d/dt の作用を求めると

$$g'(0) = \frac{d}{dt} \exp \left(it \sum_{i=1}^d c^i X_i \right) \Big|_{t=0} = i \sum_{i=1}^d c^i X_i g(0) \quad (4.8)$$

であるからリー代数の基底 X_i は群多様体 G の単位元 $g(0)$ における接空間 $T_e(G)$ の基底であることが分かる。ここで、微分可能多様体における接ベクトルの基底 $\partial/\partial x^i$ がリー代数の基底 X^i に置き換わっていることに注意せよ。

G の元 a による左移動 (left translation)⁷ $L_a : g \rightarrow ag$ によって、単位元 e の近傍は a の近傍に移る。また、 e を通る曲線 $g(t)$ は L_a によって a を通る曲線 $ag(t)$ に写像される。曲線 $ag(t)$ の a における接ベクトル d/dt は

$$\frac{d}{dt} ag(t) \Big|_{t=0} = i \sum_{i=1}^d c^i (aX_i a^{-1}) ag(0) \quad (4.9)$$

⁶純虚数 i が便宜上ついていることに注意しよう。これは前章と同じ記法に従うためである。

⁷左作用 (left action) とも呼ばれる。

となり、多様体 G の点 a における接空間 $T_a(G)$ の基底が $\{aX_i a^{-1}\}$ で与えられることが分かる。こうして、 G の各点 a にベクトル $V_a = \sum_{i=1}^d c^i (aX_i a^{-1})$ を対応させることによって、単位元におけるベクトル V_e から G 全体におけるベクトル場 $V_a^L = aV_e a^{-1}$ が導入される。このようなベクトル場を左不変ベクトル場 (left-invariant vector field) という。同様に右移動 $R_a : g \rightarrow ga$ を考えることによって右不変ベクトル場 $V_a^R = V_e := \sum_{i=1}^d c^i X_i$ が導入される⁸。右不変ベクトル場と左不変ベクトル場は共に接ベクトル空間 $T_e(G)$ と同型であり、それぞれがリー代数を作っている。

局所座標系 (x^1, \dots, x^n) に対して2つの接ベクトル

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.10)$$

が与えられるとすると、これらの交換子もまた接ベクトルである。実際、

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.11)$$

となり、 $[\dots]$ 内が $\partial/\partial x^i$ の係数となっている。

多様体の座標を定義する関数が任意の点の近傍でテイラー展開できるとき、解析的多様体 (analytic manifold) という。解析的多様体の接ベクトルが $X = d/d\lambda$ で与えられる曲線 $x^i(\lambda)$ に沿って ϵ だけ移動した点の座標と元の点の座標は

$$x^i(\lambda + \epsilon) = e^{\epsilon X} x^i(\lambda) \quad (4.12)$$

で結びつけられる。実際、曲線に沿って ϵ だけ移動した時の座標の変化は

$$x^i(\lambda + \epsilon) = x^i(\lambda) + \epsilon \frac{d}{d\lambda} x^i(\lambda) = x^i(\lambda) + \epsilon X x^i(\lambda) \quad (4.13)$$

なので

$$\frac{d}{d\lambda} x^i(\lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x^i(\lambda + \epsilon) - x^i(\lambda)}{\epsilon} = X x^i(\lambda) \quad (4.14)$$

が得られる。これを積分すると (4.12) が得られる。

8

$$\left. \frac{d}{dt} g(t)a \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \exp \left(it \sum_{i=1}^d c^i X_i \right) a \right|_{t=0} = i \sum_{i=1}^d c^i X_i g(0)a$$

から $V_a^R = V_e$ が得られる。

4.4 群上の不変積分

リー群 G 上で定義された関数 $f(g)$ ($g \in G$) の群上での積分を考えよう。群多様体上での左(右)移動は座標変換と解釈できるので、積分値はそのような変換(すなわち、座標の選び方)に対して不変となるように定義されるべきである。そこで、ここではそのような不変測度をどう定義すべきかを考えよう。左移動に対して不変な積分

$$\int f(ag)dg_L = \int f(g)dg_L \quad (4.15)$$

を与える測度 dg_L を左不変ハール測度 (left-invariant Haar measure) という。右不変なハール測度も同様に定義される。群が局所コンパクトであればこのような積分測度は規格化定数を除いて一意に存在する。一般に変数変換に対して積分を不変にする測度を不変測度 (invariant measure) というが、特に、局所コンパクト位相群上で定義される正則不変測度をハール測度という。

例 1. 実数全体 \mathbb{R} は加法群をなす。この群の不変積分は実数直線上の積分であり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad (4.16)$$

が任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して成立する。不変測度は dx である。

例 2. 正の実数の全体 \mathbb{R}^+ は乗法に対して群をなしている。この群に対して

$$\int_0^{\infty} f(ax)\frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} f(x)\frac{dx}{x} \quad (4.17)$$

は任意の $a \in \mathbb{R}^+$ に対して成立する不変積分であり、不変測度は dx/x である。

例 3. 3角行列の群

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}; x, y, z \in \mathbf{R}, x > 0, z > 0 \right\} \quad (4.18)$$

の左移動を考える。 $a, c > 0$ と仮定して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

なる左移動を考えると、

$$dx'dy'dz' = \left| \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} \right| dx dy dz = a^2 c dx dy dz = \frac{x'^2 z'}{x^2 z} dx dy dz \quad (4.20)$$

よって、左ハール測度は $dx dy dz / (x^2 z)$ であることがわかる。同様に、右ハール測度は $dx dy dz / (x z^2)$ で与えられる。

一般のリー群に対して左ハール測度を求めるために、単位元近傍の体積要素が左移動に対してどのように変化するかを調べる。 n 次元微分可能多様体上の任意の点 P における体積要素 $dV_n(P)$ は、点 P における n 個の1次独立な微小接ベクトルが張る体積であると定義される。

$$dV_n(P) = \begin{vmatrix} \delta t_1^1 & \cdots & \delta t_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta t_1^n & \cdots & \delta t_n^n \end{vmatrix} = \det[\delta t_1, \dots, \delta t_n] \quad (4.21)$$

この体積要素の符号は局所座標系が右手系か左手系かを定義する。多様体全体にわたってこの符号が一定の時は、向き付け可能な多様体であるという。

リー群 G の単位元近傍の体積要素が左移動に対してどう変化するかを調べるために、単位元近傍の元 $g = \exp(i \sum_{i=1}^n \delta t^i X_i)$ の $a = \exp(i \sum_{i=1}^n u^i X_i)$ による左移動を考える。

$$ag = \exp \left(i \sum_{i=1}^n \phi^i(u, \delta t) X_i \right) \quad (4.22)$$

右辺の ϕ^i を $\delta t = 0$ の周りに展開すると $\phi^i(u, 0) = u^i$ に注意して

$$\phi^i(u, \delta t) = u^i + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \phi^i(u, x)}{\partial x^j} \right|_{x=0} \delta t^j \quad (4.23)$$

よって、 a 近傍の微小ベクトルは

$$dt^i(a) = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \phi^i(u, x)}{\partial x^j} \right|_{x=0} dt^j =: \sum_{j=1}^n [C_L]_j^i dt^j(e) \quad (4.24)$$

ここで

$$[C_L]_j^i(u) := \left. \frac{\partial \phi^i(u, x)}{\partial x^j} \right|_{x=0} \quad (4.25)$$

こうして、体積要素は左移動によって

$$dV(a) = \det[[C_L]_j^i(a)] dV(e) \quad (4.26)$$

のように変換される。従って、左移動に対して不変なハール測度は

$$dg_L = \det[[C_L]_j^i(a)]^{-1} dV(a) \quad (4.27)$$

で与えられる。この行列式が0でないことは、左移動が微分同相写像であることによる。同様に右ハール測度は

$$[C_R]_j^i := \left. \frac{\partial \phi^i(x, u)}{\partial x^j} \right|_{x=0} \quad (4.28)$$

と置き換えることによって得られる。

コンパクト群 ($O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(2n, \mathbf{C}/\mathbf{R})$) は群のパラメータ領域も有界閉区間なので、群多様体の体積 $\int_G dg_L$ も有限である。これに対して、ノンコンパクト群 ($GL(n, \mathbf{C}/\mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{C}/\mathbf{R})$) の体積は有限ではない。コンパクト群 G では全体積が有限なので、 $\int_G dg_L = 1$ と規格化できる。この時、 G 上の連続関数 f に対してその左不変積分

$$I(f) = \int_G f(g) dg_L \quad (4.29)$$

は一意に決まる。このことから、コンパクト群の右不変積分もまた $I(f)$ に等しいことが分かる。実際、 G の任意の元 g_0 に対して $I(f)$ から新しい積分

$$I^*(f) = \int_G f(gg_0) dg_L \quad (4.30)$$

を導入すると、 $I^*(f)$ は G 上の左不変積分なので ($f(gg_0) = \tilde{f}(g)$ とおけば \tilde{f} に関する左不変積分となっている) 不変積分の一意性より $I^*(f) = I(f)$ 、すなわち、

$$\int_G f(gg_0) dg_L = \int_G f(g) dg_L \quad (4.31)$$

が成立し、左不変積分は右不変積分に等しいことが分かる (直感的には、 g が群全体の値をくまなく取るとき、その全体は gg_0 の全体に等しいと理解できる)。従って、コンパクト群の不変ハール測度は両側不変 (right and left invariant) である。

コンパクトでないリー群の場合も左右の不変ハール測度が等しくなる場合もある。その好例が $GL(n, \mathbf{R})$ である。この群の元の行列要素 $g = (g_{ij})$ を積分変数のパラメータと考えると

$$dg = \prod_{ij} dg_{ij} \quad (4.32)$$

元の左移動を $g'_{ij} = \sum_k a_{ik} g_{kj}$ とすると

$$\begin{aligned} \prod_{ij} dg'_{ij} &= (\det A)^n \prod_{ij} dg_{ij} = [\det(g'g^{-1})]^n \prod_{ij} dg_{ij} \\ &= (\det g')^n (\det g)^{-n} \prod_{ij} dg_{ij} \end{aligned} \quad (4.33)$$

よって左不変ハール測度は

$$dg = (\det g)^{-n} \prod_{ij} dg_{ij} \quad (4.34)$$

であることが分かる。同様にして右移動に関しても同じ結果になることが分かる。

4.5 コンパクトリー群

コンパクトで連結なリー群 G^9 の中心 (すなわち、 G のすべての元と可換な不変部分群) を Z とすると、 G の随伴表現は商群 G/Z の忠実な表現であるから、コンパクト群の表現を調べるためには随伴表現を調べるのが有益である。

コンパクト群の群多様体上の積分は有限で、その積分測度は両側不変であった。群多様体上の体積を $\int_G dg = 1$ と規格化しておく。群 G の表現を D をし、その表現空間を V とする。 V 上の内積を $\langle x, y \rangle$ ($x, y \in V$) と書き、次の量を定義する。

$$\langle x, y \rangle := \int_G (D(g)x, D(g)y) dg \quad (4.35)$$

この量もまた V 上の内積である。積分が左不変なので群 G の任意の元 h に対して

$$\begin{aligned} \langle D(h)x, D(h)y \rangle &= \int_G (D(g)D(h)x, D(g)D(h)y) dg \\ &= \int_G (D(gh)x, D(gh)y) dg \\ &= \int_G (D(g)x, D(g)y) dg = \langle x, y \rangle \end{aligned} \quad (4.36)$$

このように、コンパクトリー群の表現は内積を変えないのでこの内積 $\langle x, y \rangle$ に関してユニタリである。このような表現 $D(g)$ を群のユニタリ表現という。こうして次の定理が得られる。

⁹コンパクトで連結な群は $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(2n, \mathbf{R})$ である。コンパクトで連結な群の元は $g = \exp\left(\sum_{i=1}^d t^i X_i\right)$ と書けることを思い出そう。

Theorem 23 コンパクトリー群の任意の表現は、適当な内積を定義すればその内積を不変に保つユニタリ表現となる。

リー代数の随伴表現 (3.71) は純虚数の交代行列であるから、コンパクト群の随伴表現の表現行列 (3.70) は実直交行列である。(群の元が直交行列の時は、リー代数は交代行列となることを思い出そう(表 3.1 参照))。定理 23 によれば、表現の直交性はコンパクト群の任意の表現で保たれることが分かる。

(3.71) から、コンパクトリー群のリー代数の構造定数は

$$f_{ijk} = -f_{ikj} \quad (4.37)$$

を満たし、すべての添え字 i, j, k に対して完全反対称である。この結果は、(3.96) とコンシステントである。

Theorem 24 コンパクトリー代数の構造定数 f_{ijk} は、すべての添え字 i, j, k に対して完全反対称である。

この定理からコンパクトリー代数のカルタン計量の対角要素は正の値を取りえないことがわかる。

$$g_{ii} = \sum_{j,k} f_{ijk} f_{ikj} = - \sum_{j,k} (f_{ijk})^2 \leq 0 \quad (4.38)$$

特に、 $g_{ii} = 0$ となるのはすべての j, k に対して $f_{ijk} = 0$ となる場合であるから、 X_i がリー代数の中心に属する場合である。したがって、コンパクトリー代数は中心 W_c とそれ以外 W_0 の直和となる： $W = W_c \oplus W_0$ 。このとき、 W_0 は可換な不変部分代数を含まないので半単純である。実際、もしそうでないとすると、 W_0 の可換な不変部分代数の元を X_a, X_b とすると、これらは可換なので $f_{abc} = 0$ 。よって、(4.37) より $f_{acb} = 0$ となる。しかし、これは X_a が W の任意の元 X_c と交換することを意味する ($[X_a, X_c] = i f_{acb} X_b = 0$) ので、 W_0 は W の中心となり矛盾。ゆえに W_0 は半単純である。半単純なリー代数は単純リー代数の直和であらわされる(定理 15)。また、可換なリー代数は 1 次元リー代数の直和なので次の定理が得られる。

Theorem 25 任意のコンパクトリー代数は、単純リー代数と 1 次元リー代数の直和であらわされる。

1 次元リー代数に対応するコンパクトリー群は 1 次元ユニタリ群 $U(1)$ である。定理 25 により任意のコンパクトな連結線形リー群は一般に $U(1)$ と単純リー群の直積で表されることが分かる。任意のコンパクトリー群は単純リー代数に分解できるので、以下では単純リー代数を考える。

第5章 ルートとウェイト

5.1 カルタン部分代数

リー代数の構造定数は随伴表現を与えるが、これらがすべて独立なわけではない。そこで、リー代数の基底を上手く選んでゼロでない構造定数のみで交換関係

$$[X_i, X_j] = if_{ijk}X_k \quad (5.1)$$

を構成したい(これまでと同様に、2度現れる添え字については $k = 1, 2, \dots, d$ について和をとるものとする)。

リー代数の基底 X_i ($i = 1, \dots, d$) の中で、互いに可換なものが r 個あるとして、それらを H_a ($a = 1, \dots, r$) と書く。

$$[H_a, H_b] = 0 \quad (a, b = 1, \dots, r) \quad (5.2)$$

対応する構造定数は $f_{abk} = 0$ ($a, b = 1, \dots, r; k = 1, \dots, d$) である。コンパクトリー群の構造定数 f_{ijk} は i, j, k について完全反対称であるので((3.96) 参照)、随伴表現は

$$\{\text{ad}(X_k)\}_{ab} = -if_{kab} = 0 \quad (a, b = 1, \dots, r; k = 1, \dots, d) \quad (5.3)$$

で与えられる。 $\{H_a; a = 1, \dots, r\}$ の張る空間はリー代数の部分空間をなす。これをカルタン部分代数 (Cartan subalgebra)、その次元 r はリー代数の階数 (rank) という。すなわち、リー代数のランクは、リー群の一次独立な生成元のうち互いに可換なものの最大個数である。ランクはリー代数の基底の取り方にはよらず、リー代数に固有の量である。

リー代数の随伴表現はリー代数の中心を除いて忠実な表現であるから、コンパクトな単純リー代数の構造は、随伴表現を用いて調べることができる。(5.3) と構造定数の対称性から

$$\text{ad}(H_a) = \begin{matrix} & r & d-r \\ \begin{matrix} r \\ d-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{nonzero} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.4)$$

ここで対角成分の0は r 行 r 列のゼロ行列、非対角成分の0は r 行 $d-r$ 列または $d-r$ 行 r 列のゼロ行列、nonzeroは $d-r$ 行 $d-r$ 列のゼロ行列ではない行列を表している。

随伴表現の表現空間はリー代数そのものであるから、 $\text{ad}(X_k)$ はリー代数のあるベクトル $X = x^i X_i$ から別なベクトル $Y = y^j X_j$ への間の1次変換の行列であるとみなすこともできる。すなわち、随伴表現を行列とみなすと、行列 $\text{ad}(X_k)$ はベクトル (x_1, \dots, x_d) からベクトル (y_1, \dots, y_d) への1次変換

$$y^j = \{\text{ad}(X_k)\}_{ij} x^i \quad (5.5)$$

の役割を果たす。(5.4)よりカルタン部分代数のベクトル $H = h^a H_a$ は、 $a = r+1, \dots, d$ に対しては $h^a = 0$ なので、 $\text{ad}(H_a)$ によりゼロベクトルに写像される：

$$\{\text{ad}(H_a)\}_{bc} h^c = 0 \quad (5.6)$$

すなわち、カルタン部分代数は1次写像 $\text{ad}(H_a)$ の核である。また、 $\{X_i, i = r+1, \dots, d\}$ によって張られる $d-r$ 次元空間は、1次変換 $\text{ad}(H_a)$ によってそれ自身に変換される。単純リー代数の場合は、この $d-r$ 次元空間は不変部分空間である。以下では、この不変部分空間の固有ベクトルと固有値について考える。

5.2 カルタン標準系

行列 $\text{ad}(H_a)$ ($a = 1, \dots, r$)は互いに可換だから、適当に基底を選ぶことによって同時対角化が可能である。随伴表現の定義(3.66)により $\text{ad}(iH_a)$ は実交代行列であるから、ゼロでない固有値は複素数となる。従って、実行列によって対角化することはできないが、線形代数の定理により適当な直交行列 T を用いて次のように $r \times r$ のゼロ行列(これを0で表す)と $(d-r) \times (d-r)$ の行列にブロック対角化できる。すなわち、ゼロ行列でない $(d-r) \times (d-r)$ 行列は2行2列の交代行列の直和で表され、他の行列成分はすべてゼロである。

$$T^{-1} \text{ad}(iH_a) T = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & \alpha_a^1 & & & \\ & -\alpha_a^1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \alpha_a^s \\ & & & & -\alpha_a^s & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

ここで $a = 1, \dots, r$, $s = (d-r)/2$ である。このことから、 $d-r$ が偶数でなければならないことがわかる。これから $\text{ad}(iH_a)$ の固有値は r 個のゼロと $\pm i\alpha_a^j$ ($j = 1, \dots, s = (d-r)/2$) で与えられることが分かる。ゆえに、 $\text{ad}(H_a)$ の固有値はゼロと実数のペア $\pm\alpha_a$ である。対応する固有ベクトルを $v_{\pm\alpha} = \{v_{\pm\alpha}^j, j = 1, \dots, d\}$ とすると

$$\{\text{ad}(H_a)\}_{ij}v_{\alpha}^j = \alpha_a v_{\alpha}^i \quad (5.8)$$

となる。ここで H_a は互いに交換するので、 $d-r$ 個の固有ベクトルはすべての $\text{ad}(H_a)$ ($a = 1, \dots, r$) について共通に取ることができる。このとき、共通に取った各同時固有ベクトルに対応する固有値 α_a ($a = 1, \dots, r$) は r 次元ベクトル空間のベクトルの成分とみなすことができる。これをルート (root) という。

$\{\text{ad}(H_a)\}_{ij}$ が純虚数であることに注意して (5.8) の両辺の複素共役をとると

$$\{\text{ad}(H_a)\}_{ij}v_{\alpha}^{j*} = -\alpha_a v_{\alpha}^{i*}. \quad (5.9)$$

従って、 v_{α}^* はルート $-\alpha$ に対応することが分かる。随伴表現 $\{\text{ad}(H_a)\}_{ij}$ は構造定数と関係式 (3.66)

$$\{\text{ad}(H_a)\}_{ij} = -if_{aij} \quad (5.10)$$

で結ばれている。

$\text{ad}(H_a)$ の 2 つの固有ベクトルを v_{α}, v_{β} とすると、 $\text{ad}(H_a)$ の反対称性より

$$\begin{aligned} \alpha_a(v_{\beta}, v_{\alpha}) &= (v_{\beta}, \text{ad}(H_a)v_{\alpha}) \\ &= v_{\beta}^i \{\text{ad}(H_a)\}_{ij}v_{\alpha}^j \\ &= -\{\text{ad}(H_a)\}_{ji}v_{\beta}^i v_{\alpha}^j \\ &= -\beta_a v_{\beta}^j v_{\alpha}^j \\ &= -\beta_a(v_{\beta}, v_{\alpha}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

よって、 $(\alpha_a + \beta_a)(v_{\beta}, v_{\alpha}) = 0$ が得られる。従って、すべての $a = 1, 2, \dots, r$ に対して、 $\alpha_a + \beta_a = 0$ でなければ固有ベクトルは直交する。

$\text{ad}(H_a)$ の 0 でない同時固有値 α_a は非縮退であることを 5.6 節で示す。すなわち、 $\text{ad}(H_a)$ は互いに異なる $d-r$ 個のルート α_a を持ち、それぞれの固有ベクトルの張る固有空間は 1 次元となる。このとき、固有ベクトル v_{α} を規格化すれば

$$(v_{\beta}, v_{\alpha}) = \delta_{\alpha+\beta, 0} \quad (5.12)$$

が得られる。ここで $\delta_{\alpha+\beta,0}$ は(すべての $a = 1, 2, \dots, r$ に対して) $\alpha_a + \beta_a = 0$ の時に 1、それ以外は 0 である。

一方、 v_α の複素共役 v_α^* はルート $-\alpha_a$ に対応するので、

$$v_{-\alpha} = v_\alpha^* \quad (5.13)$$

とすることができる。これを用いると (5.12) は

$$(v_\beta^*, v_\alpha) = \delta_{\alpha,\beta} \quad (5.14)$$

と書くこともできる。この結果は、ルートベクトル $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ と $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ が一致しない限り、固有ベクトル v_α と v_β^* は直交することを示している。 v_β^* をブラベクトル $\langle \beta |$ 、 v_α をケットベクトル $|\alpha\rangle$ で表記すると、(5.14) は $\langle \beta | \alpha \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ と簡潔に表記できる。

固有値は非縮退であるから、ルート $\pm\alpha$ に対応する固有ベクトル $v_{\pm\alpha}$ を用いてリー代数の元を

$$E_\alpha = v_\alpha^i X_i, \quad E_{-\alpha} = v_{-\alpha}^i X_i = v_\alpha^{i*} X_i \quad (5.15)$$

のように構成すると(最後の等式で (5.13) を用いた)、 $\{H_a, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ はリー代数の新しい基底をなす。これをカルタン標準形という。このとき

$$(E_\alpha, E_\beta) := (v_\alpha, v_\beta) = \delta_{\alpha+\beta,0} \quad (5.16)$$

が得られる。固有ベクトルの完全性

$$\sum_\alpha v_\alpha^i v_\alpha^{j*} = \delta_{ij} \quad (5.17)$$

と v_α の規格化条件

$$v_\alpha^i v_\alpha^{i*} = v_\alpha^i v_{-\alpha}^i = 1 \quad (5.18)$$

を用いると ((5.18) では i について和がとられていることに注意しよう)、カルタン計量は

$$\begin{aligned} g_{ab} &= (H_a, H_b) = i^2 \{ \text{ad}(H_a) \}_{ij} \{ \text{ad}(H_b) \}_{ji} \\ &= - \sum_\alpha \{ \text{ad}(H_a) \}_{ij} v_\alpha^j v_\alpha^{k*} \{ \text{ad}(H_b) \}_{ki} \\ &= - \sum_\alpha \alpha_a \alpha_b v_\alpha^i v_\alpha^{i*} \\ &= - \sum_\alpha \alpha_a \alpha_b \end{aligned} \quad (5.19)$$

が得られる。ここで、最後の等式を得る際に (5.18) を用いた。

(5.8) の両辺に X_i を掛けて i について和をとると左辺は (5.10) より

$$\begin{aligned} \{\text{ad}(H_a)\}_{ij} v_\alpha^j X_i &= -i f_{aij} v_\alpha^j X_i = i f_{aji} X_i v_\alpha^j \\ &= [H_a, X_j] v_\alpha^j = [H_a, E_\alpha] \end{aligned} \quad (5.20)$$

他方、左辺は (5.15) より

$$\alpha_a v_\alpha^i X_i = \alpha_a E_\alpha \quad (5.21)$$

こうして

$$[H_a, E_\alpha] = \alpha_a E_\alpha \quad (5.22)$$

を得る。

さて、ヤコビの恒等式より

$$[H_a, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] = [E_\alpha, [H_a, E_{-\alpha}]] + [[H_a, E_\alpha], E_{-\alpha}] \quad (5.23)$$

(5.22) を代入すると右辺は 0 に等しいことが分かる。従って、 $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ は H_a と交換するのでカルタン部分代数に属する。それゆえ、

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= v_\alpha^i v_{-\alpha}^j [X_i, X_j] = i v_\alpha^i v_{-\alpha}^j f_{ija} H_a \\ &= -\{\text{ad}(H_a)\}_{ij} v_\alpha^i v_{-\alpha}^j H_a = \alpha_a v_\alpha^i v_{-\alpha}^i H_a \\ &= \alpha_a H_a \end{aligned} \quad (5.24)$$

ここで、最後の等式を導く際に固有ベクトルの直交性 (5.18) を用いた。よって

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_a H_a \quad (5.25)$$

が得られる。

さらに $[H_a, [E_\alpha, E_\beta]]$ についてヤコビの恒等式と (5.22) を用いると

$$[H_a, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha_a + \beta_a) [E_\alpha, E_\beta] \quad (5.26)$$

が得られる。 $\alpha_a + \beta_a$ が $\text{ad}(H_a)$ の固有値 (すなわち、ルート) であれば、それに対応する固有空間は 1 次元 (非縮退) であったから $[E_\alpha, E_\beta]$ は $E_{\alpha+\beta}$ に比例しなければならない。

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} \quad (5.27)$$

比例定数 $N_{\alpha,\beta}$ は α, β に依存し、 $\alpha + \beta$ がルートでないときはゼロになる。

以上の議論によりリー代数のランク r の基底であるカルタン標準形 $\{H_a, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ は次の交換関係に従うことが分かった。

$$\begin{aligned}
 [H_a, H_b] &= 0 \quad (a, b = 1, \dots, r), \\
 [H_a, E_{\pm\alpha}] &= \pm\alpha_a E_{\pm\alpha}, \\
 [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \alpha_a H_a, \\
 [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta} \\
 E_\alpha^\dagger &= E_{-\alpha}, \quad (E_\alpha, E_\beta) = \delta_{\alpha+\beta, 0}, \\
 (H_a, H_b) &= g_{ab} = -\sum_{\alpha} \alpha_a \alpha_b
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

このように元の X_i に対する交換関係 (5.1) における構造定数に対して、新しい基底であるカルタン標準形の交換関係はルート α_a と定数 $N_{\alpha, \beta}$ によって決まる。(5.28) をみると、カルタン標準形は角運動量演算子の代数に良く似ていることが分かる。 H_a は J_z に、 $E_{\pm\alpha}$ は昇降演算子 J_{\pm} に類似した役割を果たしていることがわかる。この $\text{su}(2)$ との類似性を利用してコンパクトリー代数の分類がなされる。

5.2.1 $\text{SO}(3)$ のカルタン標準形

リー代数の生成子をエルミートにするために $\hat{X}_i := -iX_i$ を導入する。このとき、(3.82) よりカルタン計量は $\hat{g}_{ij} := (\hat{X}_i, \hat{X}_j) = -2\delta_{ij}$ 。よって、その逆行列は $g^{ij} = -1/2\delta_{ij}$ である。カルタン部分代数として $H_1 = \hat{X}_1$ をとると、固有方程式 (5.8) で $\text{ad}(\hat{X}_1) = \hat{X}_1$ から固有値は $\alpha = \pm 1$ で、固有ベクトルは

$$v_+ = \frac{1}{2}(0, 1, i)^T, \quad v_- = v_+^* \tag{5.29}$$

これから

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_+ = E_-^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

交換関係は

$$[H_1, E_{\pm}] = \pm E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = \frac{1}{2} H_1 \tag{5.31}$$

ここで $\alpha_1 = 1$ ならば $\alpha^1 = 1/2$ である。その他の交換関係は 0 である。これはランク 1 のリー代数である。

(5.19) を考慮して $H_1/\sqrt{2}$ を H_1 と規格化すれば、カルタン計量は $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$ となり、 $\alpha^1 = \alpha_1 = \pm 1/\sqrt{2}$ であり、交換関係 (5.31) は

$$[H_1, E_{\pm}] = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} E_{\pm}, [E_+, E_-] = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1 \quad (5.32)$$

となる。(5.31) で $\sqrt{2}E_{\pm}$ を E_{\pm} とおくと

$$[H_1, E_{\pm}] = \pm E_{\pm}, [E_+, E_-] = H_1 \quad (5.33)$$

となり $\alpha^1 = \alpha_1 = \pm 1$ である。

5.3 ルート空間

5.3.1 $N_{\alpha, \beta}$ の決定

カルタン標準形 (5.28) では、リー代数の構造はルート α と $N_{\alpha, \beta}$ で決まるが、以下で示すように $N_{\alpha, \beta}$ もルートによって決まる。従って、リー代数の構造はルートによって完全に決定される。

まず、交換関係

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha + \beta} \quad (5.34)$$

において α と β を交換すれば $N_{\alpha, \beta} = -N_{\beta, \alpha}$ が得られ、また、(5.34) のそのエルミート共役を考え、 $E_{\alpha}^{\dagger} = E_{-\alpha}$ であることに注意すると $N_{\alpha, \beta}^* = -N_{-\alpha, -\beta}$ が得られる。

$$N_{\alpha, \beta} = -N_{\beta, \alpha} = -N_{-\alpha, -\beta}^* \quad (5.35)$$

次に、 $E_{\alpha}, E_{\beta}, E_{-\alpha-\beta}$ に対してヤコビの恒等式を作ると

$$[E_{\alpha}, [E_{\beta}, E_{-\alpha-\beta}]] + [E_{\beta}, [E_{-\alpha-\beta}, E_{\alpha}]] + [E_{-\alpha-\beta}, [E_{\alpha}, E_{\beta}]] = 0 \quad (5.36)$$

ここで、(5.28) の 3 番目と 4 番目の関係式を使い、 $(\alpha + \beta)_a = \alpha_a + \beta_a$ を用いると

$$[\alpha_a N_{\beta, -\alpha-\beta} + \beta_a N_{-\alpha-\beta, \alpha} - (\alpha_a + \beta_a) N_{\alpha, \beta}] H_a = 0 \quad (5.37)$$

ここで、5.6 節で示すように α と独立でないルートは $\pm\alpha$ のみなので α_a と β_a の係数をそれぞれ独立に 0 とおくことができる。ゆえに

$$N_{\alpha, \beta} = N_{\beta, -\alpha-\beta} = N_{-\alpha-\beta, \alpha} \quad (5.38)$$

同様にして $E_\alpha, E_{-\alpha}, E_\beta$ にヤコビの恒等式を適用する

$$[E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\alpha, [E_\beta, E_{-\alpha}]] + [E_\beta, [E_{-\alpha}, E_\alpha]] = 0 \quad (5.39)$$

これに (5.28) を適用すると次の関係式が得られる。

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha + \beta} + N_{\beta, -\alpha} N_{\alpha, \beta - \alpha} = -\alpha_a \beta_a \quad (5.40)$$

となる。一方、(5.35) と (5.38) を用いると、

$$N_{-\alpha, \alpha + \beta} = -N_{\alpha, -\alpha - \beta}^* = N_{-\alpha - \beta, \alpha}^* = N_{\alpha, \beta}^* \quad (5.41)$$

$$N_{\beta, -\alpha} = N_{-\alpha, \alpha - \beta} = -N_{\alpha, \beta - \alpha}^* \quad (5.42)$$

が得られる。これらを (5.40) へ代入すると

$$|N_{\alpha, \beta - \alpha}|^2 = |N_{\alpha, \beta}|^2 + \alpha_a \beta_a \quad (5.43)$$

が得られる。

(5.43) はルートに対する漸化式とみなすことができる。この漸化式を用いると、ルート α と β から次のルートが構成できることが分かる。

$$\beta - m\alpha, \beta - (m-1)\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + n\alpha \quad (m, n \geq 0) \quad (5.44)$$

このとき仮定により $\beta + (n+1)\alpha$ はルートではないので $N_{\alpha, \beta + n\alpha} = 0$ ((5.34) から $N_{\alpha, \beta + n\alpha}$ が $E_{\beta + (n+1)\alpha}$ の係数であることに注意)。そこで、(5.43) で β の代わりに $\beta + n\alpha$ を代入すると

$$|N_{\alpha, \beta + (n-1)\alpha}|^2 = \alpha_a (\beta_a + n\alpha_a) \quad (5.45)$$

同様にして、 β の代わりに $\beta + (n-1)\alpha, \beta + (n-2)\alpha, \dots, \beta + k\alpha$ を (5.43) に代入すると

$$\begin{aligned} |N_{\alpha, \beta + (n-2)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \beta + (n-1)\alpha}|^2 &= \alpha_a [\beta_a + (n-1)\alpha_a] \\ |N_{\alpha, \beta + (n-3)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \beta + (n-2)\alpha}|^2 &= \alpha_a [\beta_a + (n-2)\alpha_a] \\ \dots \\ |N_{\alpha, \beta + k\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \beta + (k+1)\alpha}|^2 &= \alpha_a [\beta_a + (k+1)\alpha_a] \end{aligned} \quad (5.46)$$

(5.45) とこれらを足し合わせると

$$|N_{\alpha, \beta + k\alpha}|^2 = (n-k) \left[\alpha_a \beta_a + \frac{1}{2}(n+k+1)\alpha_a \alpha_a \right] \quad (5.47)$$

が得られる。

次に、ルートの下端を考える。(5.34) で $\alpha \rightarrow -\alpha$ 、 $\beta \rightarrow \beta - m\alpha$ とおくと、

$$[E_{-\alpha}, E_{\beta - m\alpha}] = N_{-\alpha, \beta - m\alpha} E_{\beta - (m+1)\alpha} \quad (5.48)$$

仮定により $E_{\beta - (m+1)\alpha}$ は存在しないので $N_{-\alpha, \beta - m\alpha} = 0$ でなければならない。従って、(5.41) より

$$0 = N_{-\alpha, \beta - m\alpha} = N_{-\alpha, \alpha + [\beta - (m+1)\alpha]} = N_{\alpha, \beta - (m+1)\alpha}^* \quad (5.49)$$

これに (5.47) で $k = -m - 1$ とおいた式を代入すると

$$\alpha_a \beta_a + \frac{1}{2}(n - m)\alpha_a \alpha_a = 0 \quad (5.50)$$

ここで

$$\alpha_a \beta_a =: (\alpha, \beta) \quad (5.51)$$

などと書くと、

$$2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = m - n \quad (5.52)$$

が得られる。これを (5.47) に代入すると

$$|N_{\alpha, \beta + k\alpha}|^2 = \frac{1}{2}(n - k)(m + k + 1)(\alpha, \alpha) \quad (5.53)$$

となり、 $|N_{\alpha, \beta}|$ もまたルート α によって完全に決まることが分かる。

このように、リー代数の構造はカルタン部分代数の随伴表現 $\{\text{ad}(H_a), a = 1, 2, \dots, r\}$ の固有値 α_a を成分とするルート $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ によって完全に決まることがわかった。ルートは r 次元ベクトル空間を張り、その計量はカルタン計量 (5.19) によって与えられる。この空間をルート空間という。

5.3.2 単純ルート

(5.52) で $m - n := n_1$ とおくと

$$2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = n_1 \quad (5.54)$$

対称性から、この式で α と β の役割を入れ替えた式もまた整数値をとるはずである。

$$2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = n_2 \quad (5.55)$$

両者の積と比からそれぞれ

$$\frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = \cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} n_1 n_2 \quad (5.56)$$

$$\frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{n_1}{n_2} \quad (5.57)$$

が得られる。仮定により $\alpha \neq \beta$ なので $\cos^2 \theta_{\alpha\beta} < 1$ である。よって、(5.56) より $\theta_{\alpha\beta}$ のとりうる値は次の場合に限定されることが分かる ($0 \leq \theta_{\alpha\beta} \leq \pi$ を仮定)。

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \leftrightarrow \theta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \text{不定} \\ \frac{1}{4} & \leftrightarrow \theta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{|\alpha|}{|\beta|} = 1 \rightarrow \text{SU}(3) \\ \frac{2}{4} & \leftrightarrow \theta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \sqrt{2} \rightarrow \text{SO}(5) \\ \frac{3}{4} & \leftrightarrow \theta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \sqrt{3} \rightarrow \text{G}_2 \end{cases} \quad (5.58)$$

このように2つの(単純)ルート α と β のなす角度は $\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6$ の4通りに限られ¹、これらに対応する2つのルートの長さの比はそれぞれ不定、 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ である。更に、 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ はそれぞれコンパクト単純リー群 $\text{SU}(3), \text{SO}(5)$ 、および、 G_2 に対応している。ランクが2の場合は、ルートは2次元ベクトルなのでルート図 (root diagram) はこれら2つのベクトルで張られる。 $\text{SU}(3), \text{SO}(5), \text{G}_2$ のルート図はそれぞれ図 5.1、図 5.2、図 5.3 のようになる。

これらの図から明らかなようにルート図は紙面に垂直な面に対して対称である。実際、(5.52) は $-n$ 以上、 m 以下なので (5.44) から α と β がルートならば

$$\beta' = \beta - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \quad (5.59)$$

もルートになることが分かる。ここで、 β' は α に垂直な面に関する β の鏡映になっていることが分かる (図 5.4 参照)。これをワイル鏡映 (Weyl reflection) という。ルート図のワイル鏡映の全体は群をなし、これをワイル群 (Weyl group) という。ワイル群はカルタン部分代数の基底 H_α に対する変換群である。

ルート空間では $(d-r)$ 個のルートが r 次元のベクトル空間を構成するから、任意のルートはこの1次独立なルートを用いて表せる。それは次のようにして選ぶことができる。まず、ルート $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ の最初のゼ

¹後に示されるように ((5.61) 参照)、2つの単純ルートのなす角度は $\pi/2$ 以上でなければならない。

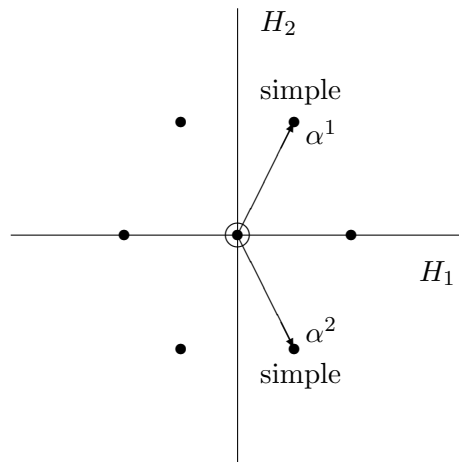


図 5.1: コンパクト単純リー群 $SU(3)$ のルート図

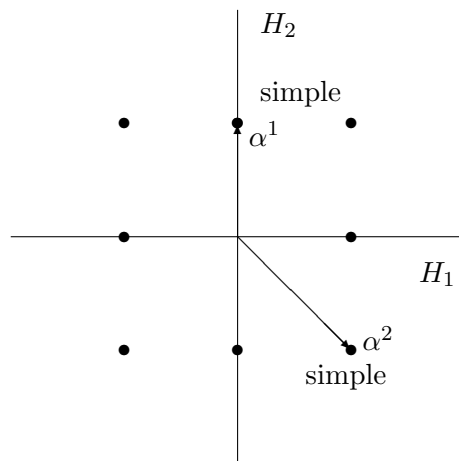


図 5.2: コンパクト単純リー群 $SO(5)$ のルート図

口でない成分 α_a ($1 \leq a \leq r$) が正 (負) の時、これを正 (負) のルート (positive/negative root) という。($d - r$) 個のルートのうち半分は正、半分は負である ((5.7) 参照)。次に、2 つのルート α, β が与えられた時、 $\alpha - \beta$ の最初のゼロでない成分が正の時、 $\alpha > \beta$ と定義する。このようにして r 個の 1 次独立なルートを小さい順に $0 < \alpha^{(1)} < \dots < \alpha^{(r)}$ のように並べ、 r 次元ルート空間の基底にとる。これらを単純ルート (simple root) と呼ぶ。他の正のルートは、交換関係 (5.34) を繰り返し適用することによって得られることが知られている、従って、正のルートは単純ルートの負でない整数係数 n_i の 1 次結合で表される。こうして、任意のルー

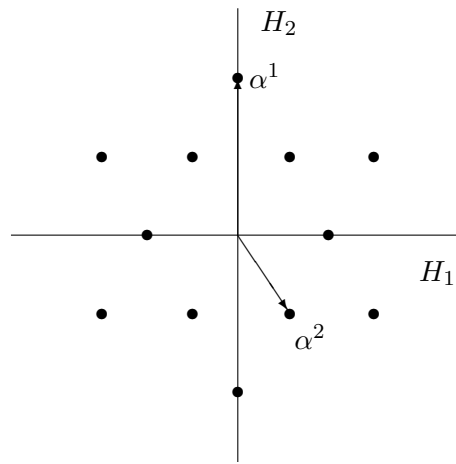
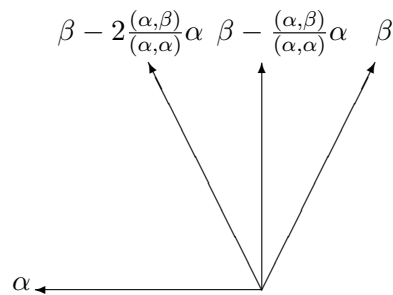
図 5.3: コンパクト単純リー群 G_2 のルート図

図 5.4: Weyl 鏡映

トは次のように表される。

$$\alpha = \pm \sum_{i=1}^r n_i \alpha^{(i)} \quad (5.60)$$

このように、コンパクト単純リー代数の構造は単純ルートによって一意に決まる。

単純ルートは次の性質がある。

(i) α, β が単純ルートのとき、 $\alpha - \beta$ はルートではない。実際、 $\alpha - \beta =: \gamma$ がルートであるとする、それは正または負のルートでなければならな

い。正とすると、それは $\alpha > \gamma$ なので γ は単純ルートでなければならない (単純ルートは小さいものから選ばれることを思い出そう)。しかし、これは単純ルートが 1 次独立であることに反する。負の場合は、 $-\gamma = \beta - \alpha$ が β よりも小さな正のルートなので単純ルートとなり、単純ルートが 1 次独立であることに矛盾する。

(ii) α, β が単純ルートのとき、

$$(\alpha, \beta) \leq 0 \quad (5.61)$$

である。なぜなら、 α, β についてのルートのシリーズ (5.44) を考えると (i) より $m = 0$ なので (5.52) から結論できる。

この結果から、2つの単純ルートのなす角度は次の不等式を満足することが分かる。

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_{\alpha\beta} < \pi \quad (5.62)$$

単純ルートは互いに線形独立である。もしそうでなければ、単純ルートの適当な線形結合

$$\gamma = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \alpha. \quad (5.63)$$

がゼロにならなければならない。単純ルートの定義よりすべての α は正なので、 $\gamma = 0$ となるためには、右辺の係数の一部が正、残りが負でなければならない。そこで、右辺を係数が正の部分と負の部分の 2 グループに分けて

$$\gamma = \mu - \nu, \quad (5.64)$$

と書こう。定義により、 μ と ν は共にすべての係数が正である。すなわち、

$$\mu = \sum_{x_{\alpha} > 0} x_{\alpha} \alpha, \quad \nu = \sum_{x_{\alpha} < 0} (-x_{\alpha}) \alpha. \quad (5.65)$$

この時、(5.61) より $(\mu, \nu) \leq 0$ なので

$$\gamma^2 = (\mu - \nu)^2 = \mu^2 + \nu^2 - 2(\mu \cdot \nu) \geq \mu^2 + \nu^2 > 0 \quad (5.66)$$

となり $\gamma = 0$ と矛盾する。従って、単純ルートは互いに線形独立である。このことから、任意の正のルートは単純ルートに非負の整数をかけた線形結合

$$\phi = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \alpha, \quad n_{\alpha} \geq 0 \quad (5.67)$$

で表される。

単純ルートは互いに線形独立なだけでなく、完全である。従って、単純ルートの数は代数のランク、すなわち、カルタン部分代数の生成子の数に等しい。実際、もしそうでないとするとすべての単純ルート α と直交するベクトル χ が存在しなければならない:

$$\forall \alpha \text{ に対して } [\chi^\alpha H_\alpha, E_\alpha] = 0 \quad (5.68)$$

ところが、 $\chi^\alpha H_\alpha$ は他のカルタン部分代数の生成子とも交換するので、それは代数のすべての生成子と交換してしまい、半単純であることに矛盾する。こうして、全代数が単純ルートから構成されることが分かる。

例として $SU(3)$ を考えよう²。(5.58) から $SU(3)$ の場合は、2つの単純ルート α, β は長さが等しく、互いの角度は $2\pi/3$ である。ルートの長さを1に規格化すると、

$$(\alpha)^2 = (\beta)^2 = 1, (\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \quad (5.69)$$

これから、 $SU(3)$ の2つの単純ルートは

$$\alpha = (1/2, \sqrt{3}/2), \beta = (1/2, -\sqrt{3}/2) \quad (5.70)$$

で与えられることが分かる (図 5.5 参照)。 $\alpha + \beta$ はルートであるが、 $2\alpha + \beta$ や $\alpha + 2\beta$ はルートではない。

5.4 デインキン図

(5.58) と (5.62) より2つの単純ルート α, β のなす角度は

$$\theta_{\alpha\beta} = \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6 \quad (5.71)$$

の4通りに限られることが分かる。デインキン図は単純ルートを図示する方法である。各単純ルートは丸印 \circ で表し、ルート間の角度は丸印の間を結ぶ線の数で表す。 $2\pi/3$ は1重線、 $3\pi/4$ は2重線、 $5\pi/6$ は3重線で結ぶ (図 5.6 参照)。 $\pi/2$ の場合は線で結ばない。また、2つのルートの長さが異なる場合は長いほうから短い方へ向かって矢印をつける。

単純リー代数は単純ルートを与えることによって一意に決定される。一方、単純ルートは、その長さとルート間の角度を与えることによって決まる。あるいは、次のカルタン行列 (Cartan matrix) を与えることによって決まる。

$$C_{\alpha\beta} = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \quad (5.72)$$

²このテーマは後に 6.1.2 節で詳しく取り上げる。

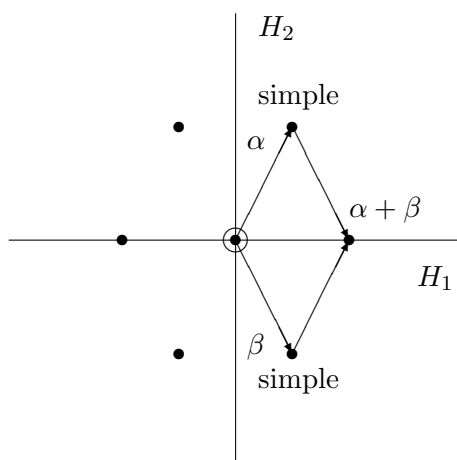


図 5.5: $SU(3)$ の 2 つの単純ルートと他のルート。 y 軸の右側のルートは正、左側のルートは負である。正のルートは昇演算子、負のルートは降演算子に対応している。

$$\circ \rightleftharpoons \circ \quad 5\pi/6 - G_2$$

$$\circ \rightleftharpoons \circ \quad 3\pi/4 - SO(5)$$

$$\circ \text{---} \circ \quad 2\pi/3 - SU(3)$$

$$\circ \quad \circ \quad \pi/2$$

図 5.6: ランク 2 の単純リー代数のデインキン図。

カルタン行列 (5.72) の対角成分は明らかに $C_{\alpha\alpha} = 2$ 、非対角成分は (5.56), (5.57) より

$$C_{\alpha\beta} = -n_2, \quad C_{\beta\alpha} = -n_1 \quad (5.73)$$

これから非対角成分は $0, -1, -2, -3$ しかとれないことが分かる。

リー群	$\theta_{\alpha\beta}$	$\cos^2 \theta_{\alpha\beta}$	n_1	n_2	$C_{\alpha\beta}$	$C_{\beta\alpha}$	カルタン行列
SU(3)	$2\pi/3$	$\frac{1}{4}$	1	1	-1	-1	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
SO(5)	$3\pi/4$	$\frac{2}{4}$	1	2	-2	-1	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
G ₂	$5\pi/6$	$\frac{3}{4}$	1	3	-3	-1	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

一般にランク r のコンパクト単純リー代数の単純ルート系には r 個の丸印をつないだ図形が 1:1 に対応する。従って、コンパクト単純リー代数の分類はあらゆる可能なディンキン図を書き下すことに帰着する。その結果を下の表に示す。

ルートの内積が正定値 $(\alpha, \alpha) \geq 0$ および $\sum_i (\alpha, \mathbf{e}_i)^2 \leq (\alpha, \alpha)$ より、ディンキン図は次の性質を有する (証明は斎藤光 p.255)。

- (i) 閉じた図形はない。
- (ii) 一つの図形の中に 3 つ以上の 2 重線、2 つ以上の 3 重線は存在しない。
- (iii) 一つの丸印につながる線分は高々 3 本である。

コンパクト単純リー代数の分類

クラス	ランク r	リー代数の次元 d	コンパクト群
A_r	1, 2, 3, ...	$(r+1)^2 - 1$	SU($r+1$)
B_r	1, 2, 3, ...	$r(2r+1)$	SO($2r+1$)
C_r	1, 2, 3, ...	$r(2r+1)$	Sp($2r, \mathbf{R}$)
D_r	3, 4, 5, ...	$r(2r-1)$	SO($2r$)
E_r	6, 7, 8	78, 133, 248	E_r
F_4	4	52	F_4
G_2	2	14	G_2

この表からわかるように、ランクが $r = 1, 2, 3$ の時は、異なるクラスのディンキン図が同一のディンキン図を与える場合がある。この場合、異なるクラスのリー代数は同型であり、対応する群は準同型である。従って、準同型定理により不変部分群 (中心) に関する商群の間に同型関係が成立する。

$$A_1 = B_1 = C_1 : \quad SU(2)/Z_2 \cong SO(3) \cong Sp(2, \mathbf{R})/Z_2 \quad (5.74)$$

$$B_2 = C_2 : \quad SO(5) \cong Sp(4, \mathbf{R})/Z_2 \quad (5.75)$$

$$A_3 = D_3 : \quad SU(4)/Z_2 \cong SO(6) \quad (5.76)$$

コンパクト群の中心は以下のように一般に巡回群 Z_n である。

$$SU(n) : Z_n \quad (5.77)$$

$$SO(2n), Sp(2n, \mathbf{R}) : Z_2 \quad (5.78)$$

$$E_6 : Z_3 \quad (5.79)$$

$$E_7 : Z_2 \quad (5.80)$$

上の表のその他の群の中心は 1 である。

5.5 ウェイト

5.5.1 リー代数の表現

コンパクトな連結リー群の表現 $D(g)$ はリー代数の表現 $\rho(X_i)$ を用いて

$$D(g) = \exp \left[i \sum_{i=1}^d t^i \rho(X_i) \right] \quad (5.81)$$

と与えられるので、この場合は群の表現を知るにはリー代数の表現を知ればよい。更に、定理 23 より、コンパクト群の表現は適当な内積に対してユニタリ表現となり、このとき $\rho(X_i)$ はエルミート行列となる。リー代数をカルタン標準形で書くと、その表現は

$$\rho(H_a), \rho(E_\alpha), \rho(E_{-\alpha}) = \rho^\dagger(E_\alpha) \quad (5.82)$$

となる。既約表現はその次元で区別できるので、太字で書いた次元 \mathbf{D} でその表現を表す。例えば、2次元表現は $\mathbf{2}$ と書く。

表現空間の基底をカルタン部分代数 H_a の固有ベクトルに取れば、可換な行列 H_a ($a = 1, \dots, r$) の同時固有ベクトルを $|\mu, \mathbf{D}\rangle^i =: u_\mu^i$ ($i = 1, \dots, \mathbf{D}$) と書くと

$$H_a |\mu, \mathbf{D}\rangle = \mu_a |\mu, \mathbf{D}\rangle \quad (a = 1, \dots, r) \quad (5.83)$$

となる。随伴表現の基底はリー代数の次元が d なので、 $|\alpha, \mathbf{d}\rangle$ と表記すると、(5.8) より $|\alpha, \mathbf{d}\rangle \propto v_\alpha$ である表現空間の内積を次のように定義しよう。

$$\langle \mu, \mathbf{D} | \nu, \mathbf{D} \rangle = (u_\mu^*)^i (u_\nu)^i \quad (5.84)$$

ここで、これまでと同様に 2 回現れる添え字 i については $i = 1, 2, \dots, d$ について和をとるものとする。 H_a はエルミート行列なので

$$\begin{aligned} \langle \mu, \mathbf{D} | H_a | \nu, \mathbf{D} \rangle &= (u_\mu^*)^i (H_a)_{ij} (u_\nu)^j \\ &= \nu_a \langle \mu, \mathbf{D} | \nu, \mathbf{D} \rangle \\ &= \mu_a \langle \mu, \mathbf{D} | \nu, \mathbf{D} \rangle \end{aligned} \quad (5.85)$$

となる。従って、固有値が異なる固有ベクトルは直交する。

5.5.2 ウエイト図

固有ベクトルを規格化して

$$\langle \mu, \mathbf{D} | \nu, \mathbf{D} \rangle = \delta_{\mu_1 \nu_1} \cdots \delta_{\mu_r \nu_r} \quad (5.86)$$

とする。 $H_a (a = 1, \dots, r)$ の同時固有状態を特徴づける固有値 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ は r 次元空間のベクトルであり、これを表現のウエイトという。随伴表現のウエイトはルートである。ルート図と同様にウエイトの作る r 次元空間の図形をウエイト図 (weight diagram) という。

ルートの場合と類似の関係がウエイトの場合にも成立する。固有ベクトル $|\mu, \mathbf{D}\rangle$ に E_α を作用させた状態 $E_\alpha |\mu, \mathbf{D}\rangle$ の固有値は

$$\begin{aligned} H_a E_\alpha |\mu, \mathbf{D}\rangle &= ([H_a, E_\alpha] + E_\alpha H_a) |\mu, \mathbf{D}\rangle \\ &= (\mu_a + \alpha_a) E_\alpha |\mu, \mathbf{D}\rangle \end{aligned} \quad (5.87)$$

から $\mu_a + \alpha_a$ であることが分かる。それゆえ

$$E_\alpha |\mu, \mathbf{D}\rangle = N_{\alpha, \mu} |\mu + \alpha, \mathbf{D}\rangle \quad (5.88)$$

と書ける。

次に、 $N_{\alpha, \mu}$ の値を求めよう。まず、

$$\begin{aligned} \alpha^a \mu_a &= \langle \mu, \mathbf{D} | \alpha^a H_a |\mu, \mathbf{D}\rangle = \langle \mu, \mathbf{D} | [E_\alpha, E_{-\alpha}] |\mu, \mathbf{D}\rangle \\ &= \langle \mu, \mathbf{D} | E_\alpha E_{-\alpha} |\mu, \mathbf{D}\rangle - \langle \mu, \mathbf{D} | E_{-\alpha} E_\alpha |\mu, \mathbf{D}\rangle \\ &= |N_{-\alpha, \mu}|^2 - |N_{\alpha, \mu}|^2 \end{aligned} \quad (5.89)$$

また、

$$\begin{aligned} N_{-\alpha, \mu} &= \langle \mu - \alpha, \mathbf{D} | E_{-\alpha} |\mu, \mathbf{D}\rangle \\ &= \langle \mu - \alpha, \mathbf{D} | E_\alpha^\dagger |\mu, \mathbf{D}\rangle \\ &= \langle \mu, \mathbf{D} | E_\alpha |\mu - \alpha, \mathbf{D}\rangle^* \\ &= N_{\alpha, \mu - \alpha}^* \end{aligned} \quad (5.90)$$

が成立する。ゆえに、

$$|N_{\alpha, \mu - \alpha}|^2 = |N_{\alpha, \mu}|^2 + (\alpha, \mu) \quad (5.91)$$

これは随伴表現の場合のルートの関係式 (5.43) に対応している。ルートの場合と同様にして、 $|\mu, \mathbf{D}\rangle$ に E_α あるいは $E_{-\alpha}$ を繰り返し作用させることによってウェイトのシリーズ

$$\mu - m\alpha, \mu - (m-1)\alpha, \dots, \mu, \mu + \alpha, \dots, \mu + n\alpha \quad (m, n \geq 0) \quad (5.92)$$

が得られる。従って (5.53) と同じ方法によって

$$|N_{\alpha, \mu+k\alpha}|^2 = \frac{1}{2}(n-k)(m+k+1)(\alpha, \alpha) \quad (5.93)$$

が得られる。また、(5.52) と同様にして

$$2 \frac{(\alpha, \mu)}{(\alpha, \alpha)} = m - n \quad (5.94)$$

が得られる。また、(5.59) と同様に、 μ がウェイトであるとする

$$\mu' = \mu - 2 \frac{(\alpha, \mu)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \quad (5.95)$$

もまたウェイトである。これから $(\mu', \mu') = (\mu, \mu)$ が言えるので、ウェイトはワイル鏡映によってその長さを変えない。従って、ウェイトの作る格子は同心球面状に位置している。例として図 5.7 に $SU(3)$ の 8 次元表現 8、図 5.8 に 15 次元表現 15 のウェイト図を示す。図で 2 重丸はウェイトが 2 重に縮退していることを示している。

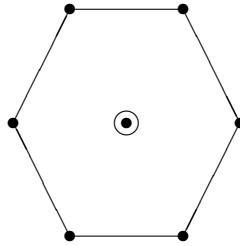


図 5.7: $SU(3)$ の 8 次元表現 8 のウェイト図。2 重丸は 2 重縮退を表す。

5.5.3 最高ウェイト

ウェイトの正負や大小もルート同様に定義できる。すなわち、ウェイト $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ の最初のゼロでない成分の正負によってウェイトの正負と定義する。また、2 つのウェイトの差 $\mu - \nu$ の最初のゼロでない成分が

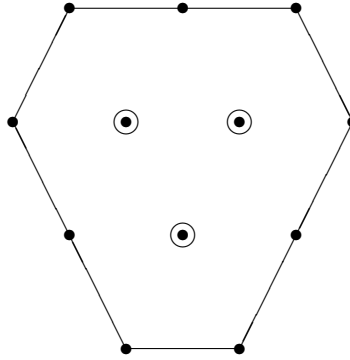


図 5.8: SU(3) の 15 次元表現 15 のウエイト図

正の時 $\mu > \nu$ と定義する。最初のゼロでない成分が等しいときは、その次のゼロでない成分を比較して大小を決定する。既約表現のウエイトをこのように定義した時、最も大きなウエイトを最高ウエイト (highest weight) という。

最高ウエイトには縮退はなく、従って対応する固有ベクトルは一意に決まる。このことから、最高ウエイトは既約表現を一意に決める重要なパラメータとなる。このことを示すために、既約表現 D の最高ウエイト μ に対応する固有ベクトルを $|\mu, D\rangle$ とし、任意のルート α_i に対して $E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \cdots E_{\alpha_k} |\mu, D\rangle$ の形のベクトルを考える。すべての k に対してのベクトルの集合 $\{E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \cdots E_{\alpha_k} |\mu, D\rangle\}$ は既約表現全体を張る。もし、最高ウエイトに対応する別の固有ベクトル $|\mu, D\rangle'$ が存在すると仮定すると c を比例定数として

$$|\mu, D\rangle' = c E_{\beta_1} E_{\beta_2} \cdots E_{\beta_l} |\mu, D\rangle \quad (5.96)$$

と書けるはずである。ただし、ウエイトの引数が等しいので $\beta_1 + \cdots + \beta_l = 0$ である。ここで β_i のうち、正のルートを交換関係を使って右に移動させるとそれが $|\mu, D\rangle$ に作用するとゼロになる（最高ウエイトなので）。従って、正のルートはすべて除外できる。ところが、 β_i の総和はゼロなので結局それらはすべてゼロとなり、最高ウエイトは一意に定まる。

既約表現の任意の固有ベクトルは最高ウエイトの固有ベクトルに負のルートに対応する $E_{-\alpha}$ を作用させることによって得られる:

$$E_{-\alpha^{(i)}} E_{-\alpha^{(j)}} \cdots E_{-\alpha^{(k)}} |\mu, D\rangle \quad (5.97)$$

このように既約表現のウエイトは最高ウエイトから単純ルートを引いていくことによって得られる。

ウエイト μ が最高ウエイトであるための必要十分条件は、すべての単純ルート $\alpha^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) に対して $\mu + \alpha^{(i)}$ がウエイトにならないこ

とである。このことから、

$$m^i := 2 \frac{(\alpha^{(i)}, \mu)}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} \quad (5.98)$$

は負でない整数となる。実際、もしこれが負の整数だとすると、(5.95) によって定義される μ' が $\mu' > \mu$ となり、 μ が最高ウェイトであるという仮定に矛盾する。 μ が最高ウェイトでない時は、 m^i は負の整数も含む整数となる。こうして、任意のウェイトはすべての m^i の組 $[m^1, \dots, m^r]$ によって完全に特徴づけられる。これをウェイトのディンキン・インデックス (Dynkin index) という。既約表現は最高ウェイトのディンキン・インデックスによって一意に決定される。そして、最高ウェイトのディンキン・インデックスはすべて 0 もしくは正の整数である。

5.5.4 基本表現

$m^i = 1, m^j = 0 (j \neq i)$ であるような最高ウェイトを $\mu^{(i)}$ をとると

$$2 \frac{(\alpha^{(i)}, \mu^{(j)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} = \delta_{ij} \quad (5.99)$$

なので、 $\mu^{(i)}$ のディンキン・インデックスは $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ である (m^i のみ 1 で他は 0)。これらを用いると、任意のウェイトは次のように表すことができる。

$$\mu = \sum_{i=1}^r m^i \mu^{(i)} \quad (5.100)$$

$\mu^{(i)}$ を基本ウェイト (fundamental weight) といい、基本ウェイト $\mu^{(i)}$ を最高ウェイトとする表現 ρ_i を基本表現 (fundamental representation) という。ディンキン・インデックスはルートを基本ウェイトを用いて展開したときの展開係数である。

群の直積表現は (2.66) より、

$$[D^{(a \times b)}(g)]_{kl, ij} \equiv D_{ki}^{(a)}(g) D_{lj}^{(b)}(g) \quad (5.101)$$

なので、これに (5.81) を代入して t^i を無限小だとみなして展開すると、リー代数の直積表現

$$\{\rho^{(a \times b)}(\hat{X})\}_{ik, jl} = \{\rho^{(a)}(\hat{X})\}_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} \{\rho^{(b)}(\hat{X})\}_{kl} \quad (5.102)$$

が得られる。直積表現の表現空間は、それぞれの表現空間の直積である。 $\rho^{(a)}(H_c), \rho^{(b)}(H_c)$ の固有ベクトルをそれぞれ $|\mu^{(a)}, N\rangle, |\mu^{(b)}, M\rangle$ とすると、

$\rho^{(a \times b)}(H_c)$ の固有ベクトルは $|\mu^{(a)}, \mathbf{N}\rangle |\mu^{(b)}, \mathbf{M}\rangle$ である。この時、(5.102) より

$$\begin{aligned} & \rho^{(a \times b)}(H_c) |\mu^{(a)}, \mathbf{N}\rangle |\mu^{(b)}, \mathbf{M}\rangle \\ &= (\rho^{(a)}(H_c) |\mu^{(a)}, \mathbf{N}\rangle) |\mu^{(b)}, \mathbf{M}\rangle + |\mu^{(a)}, \mathbf{N}\rangle (\rho^{(b)}(H_c) |\mu^{(b)}, \mathbf{M}\rangle) \\ &= [\mu^{(a)} + \mu^{(b)}]_c |\mu^{(a)}, \mathbf{N}\rangle |\mu^{(b)}, \mathbf{M}\rangle \end{aligned} \quad (5.103)$$

が得られる。従って、直積表現のウエイトはそれぞれの表現のウエイトの和である。逆に、最高ウエイトが $\mu : [m^1, \dots, m^r]$ で与えられる表現は (5.100) より m^1 個の基本表現 ρ_1 、 m^2 個の基本表現 ρ_2 、...、 m^r 個の基本表現 ρ_r の直積表現によって与えられる。

既約表現は最高ウエイトのディンキン・インデックスにより一意に決まる。既約表現のその他のウエイトは、最高ウエイトから単純ルートを順次引いていくことによって得られる。

$$\mu' = \mu - \sum_{j=1}^r k_j \alpha^{(j)} \quad (k_j \geq 0, k_j = \text{整数}) \quad (5.104)$$

この時、(5.98) とカルタン行列の定義より

$$2 \frac{(\alpha^{(i)}, \mu')}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} = m^i - \sum_{j=1}^r k_j C_{ji} \equiv p^i \quad (5.105)$$

であるから、一般のウエイトは最高ウエイトのディンキン・インデックス $[m^1, m^2, \dots, m^r]$ からカルタン行列の行の成分 $(C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jr})$ を順次引いていくことによって得られる。単純ルートは1次独立だから、(5.104) によりウエイトは $[p^1, p^2, \dots, p^r]$ によって表される。 $\sum_{j=1}^r k_j$ をウエイトのレベルという。(5.95) から、最高ウエイトから出発して (5.104) の p^i が正の時は p^i 回だけ $\alpha^{(i)}$ を引くことができる。こうして、各レベルのウエイトを求めることができる。

5.6 半単純リー代数のルートの非縮退性の証明

本章において、半単純リー代数のルートは縮退がなく、また α と独立でないルートは $\pm\alpha$ のみであることを仮定した。この証明には、6.1.1 節で扱う $su(2)$ の表現論を用いる。 $su(2)$ のルートは実際に上記の仮定をみたすので、循環論法に陥らず今までの議論を用いることができる。 α の定数倍であるようなルートを k_1, \dots, k_m とし、ルート k_t に対応する固有ベクトルを u_t とする (縮退がある場合、 k_j には重複が生じる)。 $E_t = u_t^i X_i$ とすると、(5.22) と同様の議論により

$$[H_a, E_t] = k_t \alpha_a E_t \quad (5.106)$$

となるので、 $H = \alpha^a H_a$, $|\alpha|^2 = \alpha_a \alpha_a$ とおくことで

$$[H, E_t] = k_t |\alpha|^2 E_\alpha \quad (5.107)$$

と表せる。

一方、(5.26) と同様に考えると、 $[E_{\pm\alpha}, E_t]$ はルート $(k_t \pm 1)\alpha$ に対応する。したがって $k_t \pm 1$ が 0 でなければ、 E_1, \dots, E_m のうちいくつかの線形結合で表せる。一方、 $k_t \pm 1 = 0$ のときは (5.23), (5.24) と同様に考えて

$$[E_{\pm\alpha}, E_t] = \pm \alpha_a v_{\pm\alpha}^i u_t^i H_a = \pm v_{\pm\alpha}^i u_t^i H \quad (5.108)$$

となる。

以上より、 H, E_1, \dots, E_d で生成される部分空間を V とすれば、 V は $\text{ad}(H)$, $\text{ad}(E_\alpha)$, $\text{ad}(E_{-\alpha})$ に関して閉じていることが分かる。一方、 $E_t = E_{\pm\alpha}$ の場合に (5.107) と (5.108) を使うと、 $k_t = \pm 1$, $u_t = v_{\pm\alpha}$ より

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H, \quad [H, E_{\pm\alpha}] = \pm |\alpha|^2 E_{\pm\alpha} \quad (5.109)$$

となるが、

$$H = |\alpha|^2 \tilde{H}, \quad E_{-\alpha} = \sqrt{2} \tilde{E}_\alpha, \quad E_{-\alpha} = \sqrt{2} \tilde{E}_{-\alpha} \quad (5.110)$$

とすれば、 $\{\tilde{H}, \tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_{-\alpha}\}$ は $su(2)$ の基底をなしている。したがって、 V は $su(2)$ の表現空間であり、 E_t は \tilde{H} の固有値 k_t に対応している。

さて、 $E_\alpha, H, E_{-\alpha}$ で生成される 3 次元の部分空間はスピン 1 の既約表現に対応することが分かる。 \tilde{H} の固有値 0 に対応するベクトルは H 以外に存在しないので、 V は他に整数スピンの既約表現を持たない。したがって、ルート $\pm\alpha$ に対応するリー代数の元は $E_{\pm\alpha}$ 以外に存在せず、また 2 以上の整数 n に対して $\pm n\alpha$ はルートにならないことが分かる。また、半整数スピンに対応するルート $\beta = \pm(n + 1/2)\alpha$ が存在したとすると、今度は β を基準にして議論することで元のルート $\alpha = \pm(n + 1/2)^{-1}\beta$ の存在を否定することができる。以上より、 α の定数倍となるルートは $\pm\alpha$ のみで、縮退は存在しないことが示された。

第6章 リー群の具体例

ここでは、これまでに学んだ一般論をリー群の具体例に適用することで、リー群が物理系にどのように応用されているかを学ぶと同時に一般原理の理解を深めることを目指す。

6.1 ユニタリ群

n 次のユニタリ群 (unitary group of degree n) $U(n)$ は n 行 n 列のユニタリ行列の全体からなる群であり、 \mathbb{C}^n 上で内積を保存する。このうち、行列式が 1 のものだけからなる群を n 次の特殊ユニタリ群 (special unitary group of degree n) という。

6.1.1 $SU(2)$

基本表現

$SU(2)$ は 2 行 2 列の特殊ユニタリ行列の全体 $\{U; U^\dagger U = UU^\dagger = 1, \det U = 1\}$ の作る群である。 U のユニタリ性より $U = \exp(iX)$ と書くと X はエルミート行列で、 $\det U = 1$ より $\text{Tr} X = 0$ である。従って、 X の独立なパラメータの数は $8 - 4 - 1 = 3$ である¹。

$SU(2)$ 群のリー代数 $su(2)$ は最も単純なコンパクトリー代数であり、その生成子 J_j ($j = 1, 2, 3$) は交換関係

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l, \quad j, k, l = 1, 2, 3 \quad (6.1)$$

を満足する。ここで、 ϵ_{jkl} はランク 3 の完全反対称テンソル (completely antisymmetric tensor of rank three) である。(6.1) から、 $su(2)$ の構造定数は $f_{jkl} = i\epsilon_{jkl}$ であり、カルタン計量は (3.49) より

$$g_{ij} = \epsilon_{imn}\epsilon_{jnm} = \epsilon_{nim}\epsilon_{nmj} \quad (6.2)$$

ここで公式

$$\epsilon_{nab}\epsilon_{ncd} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc} \quad (6.3)$$

¹ $SU(n)$ の独立なパラメータの数が $n^2 - 1$ であることを思い出そう。

を使うと

$$g_{ij} = \delta_{im}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{mm} = -2\delta_{ij} \quad (6.4)$$

が得られる ($\delta_{mm} = 3$ に注意せよ)。ここで、

$$\hat{g}_{ij} := -g_{ij} = 2\delta_{ij} \quad (6.5)$$

を定義する。 \hat{g}_{ij} の逆行列は

$$\hat{g}^{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad (6.6)$$

で与えられる。これを用いてルートの添え字の上げ下げが行われる。

交換関係 (6.1) から、可換なリー代数の元は自分自身しかないので、 $SU(2)$ のランクは 1 である。カルタン部分代数として $H_3 = J_3$ を選ぶと (3.73) より

$$\{\text{ad}(J_3)\}_{ij} = -i\epsilon_{3ij} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

この行列の固有値は $\alpha = \pm 1$ であり、ルートは図 6.1 のように 1 次元である。固有値 $\alpha = \pm 1$ に対応する固有ベクトルは

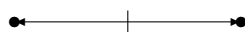


図 6.1: $SU(2)$ のルート図

$$v_{\pm} = \frac{1}{2}(1, \pm i, 0)^T \quad (6.8)$$

であり、それゆえ固有ベクトルの昇降演算子は

$$E_+ = (v_+)^i J_i = \frac{1}{2}(J_1 + iJ_2), \quad E_- = E_+^\dagger = \frac{1}{2}(J_1 - iJ_2) \quad (6.9)$$

で与えられ、交換関係

$$[H_3, E_{\pm}] = \pm E_{\pm}, [E_+, E_-] = \frac{1}{2}H_3 \quad (6.10)$$

を満たす²。これは $SO(3)$ のリー代数の交換関係 (5.31) と同じ形をしているので、 $SU(2)$ と $SO(3)$ のリー代数は同型である。このことは、 $SU(2)$

²物理では $J_{\pm} = 2E_{\pm}$, $J_3 = H_3$ を用いる場合が多い ($J_{\pm} = \sqrt{2}E_{\pm}$ を採用している教科書もある)。この時、交換関係は

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, [J_+, J_-] = 2J_3$$

となる。

と $SO(3)$ の単位元付近の構造が同一であることを意味している。すなわち、 $SU(2)$ と $SO(3)$ は局所同型 (locally isomorphic) である。しかし、群全体の構造は異なっており、 $SU(2)$ は $SO(3)$ の普遍被覆群となっている。

ルートおよびウエイトは共に 1 次元ベクトルであり、カルタン計量 (6.6) を考えると $\alpha_1 = 1, \alpha^1 = 1/2, (\alpha, \alpha) = \alpha_1 \alpha^1 = 1/2$ である。

$SU(2)$ の既約表現 N は最高ウエイト $\mathbf{j} = j\alpha$ によって決まる。 \mathbf{j} のワイル鏡映

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - 2 \frac{(\alpha, \mathbf{j})}{(\alpha, \alpha)} \alpha = -\mathbf{j} \quad (6.11)$$

が最低ウエイトである。

ウエイト μ の固有ベクトルを $|\mu, \mathbf{N}\rangle$ とすると (5.88) より

$$E_- |\mu, \mathbf{N}\rangle = N_{-1, \mu} |\mu - 1, \mathbf{N}\rangle \quad (6.12)$$

ここで (5.90) より

$$N_{-1, \mu} = N_{1, \mu-1}^* \quad (6.13)$$

右辺の値は (5.93) で $k = -1$ とおき、 $(\alpha, \alpha) = 1/2$ を代入することで得られる。すなわち、

$$|N_{-1, \mu}|^2 = |N_{1, \mu-1}|^2 = \frac{1}{4} m(n+1) \quad (6.14)$$

ここで、 m, n はウエイトシリーズ (5.92) の下限と上限を与える非負の整数である。 $N_{-1, \mu} =: N_\mu$ とおき、 $J_- = 2E_-$ を用いると

$$J_- |\mu, \mathbf{N}\rangle = 2N_\mu |\mu - 1, \mathbf{N}\rangle \quad (6.15)$$

となる。

ウエイトのシリーズ (5.92) で最高ウエイトと最低ウエイトをそれぞれ $\mathbf{j}, -\mathbf{j}$ に等しいと置く。ウエイトが 1 次元であることに注目すると、ベクトルは数に置き換えてもよいので (α を単位として考える) $\mu + n = j, \mu - m = -j$ 。これから $m = j + \mu, n = j - \mu$ 。これらを (6.15)、(6.14) に代入すると

$$\begin{aligned} J_- |\mu, \mathbf{N}\rangle &= 2N_\mu |\mu - 1, \mathbf{N}\rangle \\ |N_\mu|^2 &= \frac{1}{4} (j + \mu)(j - \mu + 1) \quad (\mu = j, j - 1, \dots, -j) \end{aligned} \quad (6.16)$$

最高ウエイトの既約表現の次元 N は、ウエイトシリーズ (5.92) のベクトルの数に一致するので

$$N = m + n + 1 = 2j + 1 \quad (6.17)$$

で与えられる。 $m, n = 0, 1, \dots$ なので

$$j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \quad (6.18)$$

である。

既約表現のディンキン・インデックスは (5.98) から

$$m = 2 \frac{(\alpha, \mathbf{j})}{(\alpha, \alpha)} = 2j \quad (6.19)$$

で与えられる (ウエイトが α 方向の 1 次元なので)。基本表現は $m = 1$ とおくことによって得られるので、 $j = 1/2$ の表現 $\rho_{1/2}$ が基本表現である。他の任意の既約表現は、基本表現の直積表現として与えられる。それゆえ、角運動量 j の状態は、スピン $1/2$ の状態の $2j$ 個の直積状態 (スピン $1/2$ を $2j$ 個合成した状態) として与えられる。

スピン $1/2$ の直積表現の既約分解

まず、パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

を定義する。カルタン部分代数を $H_3 = \sigma_3/2$ ととった時、基底ベクトルは

$$\left| \frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle := \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| -\frac{1}{2}, \mathbf{2} \right\rangle := \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

直積表現 $\rho_{1/2}^{(1)} \otimes \rho_{1/2}^{(2)}$ の表現空間の基底ベクトルのうち最高ウエイト $j = 1$ の固有ベクトルは $|1, \mathbf{3}\rangle = \alpha^{(1)}\alpha^{(2)}$ である。この時、(6.16) より

$$J_- |1, \mathbf{3}\rangle = |0, \mathbf{3}\rangle \quad (6.22)$$

である。また、(5.103) より

$$\begin{aligned} J_-(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}) &= (J_-\alpha^{(1)})\alpha^{(2)} + \alpha^{(1)}(J_-\alpha^{(2)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta^{(1)}\alpha^{(2)} + \alpha^{(1)}\beta^{(2)}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

が得られる (ここでは $j = \mu = 1/2$ であることに注意)。これを (6.22) と比較すると

$$|0, \mathbf{3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^{(1)}\beta^{(2)} + \alpha^{(2)}\beta^{(1)}) \quad (6.24)$$

であることが分かる。両辺に再び J_- を作用させることで

$$|-1, \mathbf{3}\rangle = \beta^{(1)}\beta^{(2)} \quad (6.25)$$

が得られる。(6.24) と直交する固有ベクトルを選ぶことで

$$|0, \mathbf{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^{(1)}\beta^{(2)} - \alpha^{(2)}\beta^{(1)}) \quad (6.26)$$

が得られる。このように、2つの既約表現の直積表現を既約表現の直和に分解できた。これを次のように書こう。

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} \quad (6.27)$$

クレブシュ - ゴルダン係数

一般に、最高ウェイトが j_1 と j_2 の2つの既約表現の直積表現は、次のような既約表現の直和に分解できる。

$$\begin{aligned} |\mu_1, \mathbf{2j}_1 + \mathbf{1}\rangle |\mu_2, \mathbf{2j}_2 + \mathbf{1}\rangle &= \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle \mu_1 + \mu_2; J | \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 \rangle \\ &\times |\mu_1 + \mu_2, \mathbf{2J} + \mathbf{1}\rangle \end{aligned} \quad (6.28)$$

ここで係数 $\langle \mu_1 + \mu_2; J | \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 \rangle$ をクレブシュ - ゴルダン係数 (Clebsch-Gordan coefficient) という。このように、クレブシュ - ゴルダン係数は直積表現を既約表現の直和に分解する際の係数として現れる。

クレブシュ - ゴルダン係数は対称直交行列である。すなわち、

$$\langle M; J | \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 \rangle = \langle \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 | M, J \rangle \quad (6.29)$$

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J \langle \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 | M, J \rangle \langle M; J | \mu'_1, j_1; \mu'_2, j_2 \rangle = \delta_{\mu_1\mu'_1} \delta_{\mu_2\mu'_2} \quad (6.30)$$

$$\sum_{\mu_1=-j_1}^{j_1} \sum_{\mu_2=-j_2}^{j_2} \langle M; J | \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 \rangle \langle \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 | M', J' \rangle = \delta_{MM'} \delta_{JJ'} \quad (6.31)$$

逆に、(6.28) の右辺のダミー変数 J を J' と置き換えた上で両辺に $\langle \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 | M, J \rangle$ を掛けて μ_1, μ_2 について和をとり、(6.31) を用いると

$$\begin{aligned} |M = \mu_1 + \mu_2, \mathbf{2J} + \mathbf{1}\rangle &= \sum_{\mu_1=-j_1}^{j_1} \sum_{\mu_2=-j_2}^{j_2} \langle \mu_1, j_1; \mu_2, j_2 | M, J \rangle \\ &\times |\mu_1, \mathbf{2j}_1 + \mathbf{1}\rangle |\mu_2, \mathbf{2j}_2 + \mathbf{1}\rangle \end{aligned} \quad (6.32)$$

これは既約表現を直積表現の和で展開したものである。

四元群

既約表現を最高ウェイト $J_3 = j$ と J_3 の値であるウェイト m でラベルづけしよう。

$$|j, m\rangle \quad (m = j, j-1, \dots, -j) \quad (6.33)$$

この状態を用いてカルタン部分代数 J_3 と昇降演算子 $J^\pm \equiv J_1 \pm iJ_2$ の行列要素を表すと

$$\langle j, m' | J_3 | j, m \rangle = m \delta_{m, m'} \quad (6.34)$$

$$\langle j, m' | J^+ | j, m \rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m', m+1} \quad (6.35)$$

$$\langle j, m' | J^- | j, m \rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m', m-1} \quad (6.36)$$

これは $su(2)$ 代数のスピン j 表現に他ならない。特に、 $j = 1/2$ の場合は

$$J_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad J_2 = \frac{1}{2}\sigma_2, \quad J_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 \quad (6.37)$$

である。

SU(2) 群はノルム 1 の 4 元数群 (quaternion group of norm 1)

$$Q = \{\pm 1, \pm\sigma_x, \pm\sigma_y, \pm\sigma_z\} \quad (6.38)$$

に同型である。これを示すために、まず 2 行 2 列の任意の特殊ユニタリ行列が

$$u = a_0 + i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_z & ia_x + a_y \\ ia_x - a_y & a_0 - ia_z \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

の形で書けることに注意する。ここで (a_0, a_x, a_y, a_z) は実の単位四元ベクトル (unit 4-vector) である。

$$a_0^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1. \quad (6.40)$$

これは 4 次元空間の 3 次元単位球面であり、 S^3 と書かれる。これと等価な SU(2) の表現は、スピンを単位 3 次元ベクトル \hat{n} の周りの角度 θ ($0 \leq \theta < 4\pi$) 回転させる行列である。

$$u(\hat{n}, \theta) = \cos \frac{\theta}{2} + i(\hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\theta}{2} = \exp \left(i \frac{\theta}{2} \hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (6.41)$$

$$u(\hat{n}, \theta + 2\pi) = -u(\hat{n}, \theta) \quad (6.42)$$

6.1.2 SU(3)

ゲルマン行列

SU(3) は 3 行 3 列の特殊ユニタリー行列 \hat{U} 全体の作る群である。行列式が 1 なので、3 行 3 列のトレースがゼロのエルミート行列 \hat{X} を用いて $\hat{U} = \exp(i\hat{X})$ と書ける。独立なパラメータの数は $2 \times 3^2 - 3^2 - 1 = 8$ である。ゲルマン行列の標準基底は次の 8 つのエルミート行列である。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

SU(3) の生成元 F_i はゲルマン行列を用いて次のように与えられる。

$$F_i = \frac{1}{2} \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (6.44)$$

これらは

$$\text{Tr}(F_i F_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (6.45)$$

を満たし、次の交換関係を満足する。

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k \quad (6.46)$$

ここで、 f_{ijk} は SU(3) の構造定数であり、添え字 i, j, k に関して完全反対称である。ゼロでない値を表 6.1 に示す。特に、 F_1, F_2, F_3 は SU(3) の SU(2) 部分群を形成する。これをアイソスピン部分群という。

ゼロでないカルタン計量は対角成分のみである。

$$g_{ij} = -f_{ilk} f_{jkl} = 3 \delta_{ij} \quad (6.47)$$

ゲルマン行列の反交換関係は次式で与えられる。

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = 2 d_{ijk} \lambda_k + \frac{4}{3} \delta_{ij} \quad (6.48)$$

表 6.1: SU(3) のゼロでない構造定数 f_{ijk} 。 i, j, k に関して完全反対称。

i	j	k	f_{ijk}
1	2	3	1
1	4	7	1/2
1	5	6	-1/2
2	4	6	1/2
2	5	7	1/2
3	4	5	1/2
3	6	7	-1/2
4	5	8	$\sqrt{3}/2$
6	7	8	$\sqrt{3}/2$

表 6.2: (6.49) 式で定義される完全対称な d_{ijk} の値

i	j	k	d_{ij}^k	i	j	k	d_{ijk}
1	1	8	$1/\sqrt{3}$	3	5	5	1/2
1	4	6	1/2	3	6	6	-1/2
1	5	7	1/2	3	7	7	-1/2
2	2	8	$1/\sqrt{3}$	4	4	8	$-1/(2\sqrt{3})$
2	4	7	-1/2	5	5	8	$-1/(2\sqrt{3})$
2	5	6	1/2	6	6	8	$-1/(2\sqrt{3})$
3	3	8	$1/\sqrt{3}$	7	7	8	$-1/(2\sqrt{3})$
3	4	4	1/2	8	8	8	$-1/\sqrt{3}$

ここで、 d_{ijk} は i, j, k に関して完全対称な係数でありゲルマン行列を用いて

$$d_{ijk} = \text{Tr}(\{\lambda_i, \lambda_j\} \lambda_k) \quad (6.49)$$

と書くことができる。 d_{ijk} の値は表 6.2 に示す。

F_i, d_{ijk}, f_{ijk} は次の恒等式を満足する。

$$[F_i, \{F_j, F_k\}] + \{[F_j, F_i], F_k\} + \{[F_k, F_i], F_j\} = 0 \quad (6.50)$$

$$d_{jkl} f_{ilm} + d_{ikm} f_{jil} + d_{jlm} f_{kil} = 0 \quad (6.51)$$

また、次の関係式も成立する。これらは $SU(3)$ 空間の回転と解釈できる。

$$e^{-2i\theta F_7} F_1 e^{2i\theta F_7} = \cos \theta F_1 + \sin \theta F_4 \quad (6.52)$$

$$e^{-2i\theta F_7} F_2 e^{2i\theta F_7} = \cos \theta F_2 + \sin \theta F_5 \quad (6.53)$$

$$e^{-2i\theta F_7} F_3 e^{2i\theta F_7} = \cos^2 \theta F_3 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta (F_3 + \sqrt{3} F_8) - \sin \theta \cos \theta F_6 \quad (6.54)$$

ここで、 $\theta = \pi/2$ とおくと、 $SU(2)$ のリー代数 $\{F_1, F_2, F_3\}$ を F_7 について π 回転することによって $SU(2)_V$ のリー代数 $\{F_4, F_5, (1/2)(F_3 + \sqrt{3}F_8)\}$ が生成されることが分かる。

随伴表現

カルタン部分代数としては対角的な F_3 と F_8 をとることができる（これらは互いに交換する）。

$$H_1 = F_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = F_8 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

したがって、 $SU(3)$ のランクは2であり、ルートは2次元ベクトルとなる。それらを求めるために、随伴表現

$$\{\text{ad}(H_1)\}_{ij} = -if_{3ij}, \quad \{\text{ad}(H_2)\}_{ij} = -if_{8ij} \quad (6.56)$$

の同時固有ベクトルを考える。(6.56) を行列表示で書くと

$$\begin{aligned} \text{ad}(H_1) = i & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{ad}(H_2) = i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.57)$$

これら交換する8行8列行列は8個の固有値と固有ベクトル v_α^i をもつが、それらは次の表の通りである。ここで、固有値 $(0,0)$ は2重縮退している。

(α_1, α_2)	v_α^i
$(\pm 1, 0)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, \pm i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$(\pm 1/2, \pm \sqrt{3}/2)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(0, 0, 0, 1, \pm i, 0, 0, 0)$
$(\mp 1/2, \pm \sqrt{3}/2)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(0, 0, 0, 0, 0, 1, \pm i, 0)$
$(0, 0)$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$
$(0, 0)$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$

ここで、固有ベクトルの規格化定数 $1/\sqrt{6}$ は規格化条件

$$g_{ij}v^i v^{j*} = 1 \quad (6.58)$$

と $g_{ij} = 3\delta_{ij}$ であることから決められた。

カルタン標準形

カルタン計量は $g_{ij} = 3\delta_{ij}$ 、また、カルタン行列は??節より

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

これから2つのルートのなす角度 θ が $\cos \theta = -1/2$ を満足しなければならぬので、 $\theta = 2\pi/3$ である。これを満足するものとして、1 に規格化された次の2つの単純ルート $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ をとる。

$$\alpha^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \alpha^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (6.60)$$

これから、基本表現の定義 (5.99) を満足する基本ウエイトを求めると

$$\mu^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \mu^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (6.61)$$

であることが分かる (これらが実際に (5.99) を満足することを確認してみよ)。これらを用いてルートを表した時、その係数がルートのディンキンインデックスである ((5.100) をみよ)。よって、

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad [2, -1] \\ \alpha^{(2)} &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad [-1, 2] \end{aligned} \quad (6.62)$$

このようにして求められたディンキンインデックスがカルタン行列 (6.59) の1行目と2行目に一致していることがわかる (なぜか?)。

カルタン標準形は

$$E_\alpha = v_\alpha^i F_i \quad (6.63)$$

と定義される。これに (6.58) の固有ベクトルを代入すると

$$E_{(\pm 1, 0)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(F_1 \pm iF_2) \quad (6.64)$$

$$E_{(\pm 1/2, \pm \sqrt{3}/2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(F_4 \pm iF_5) \quad (6.65)$$

$$E_{(\mp 1/2, \pm \sqrt{3}/2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(F_6 \pm iF_7) \quad (6.66)$$

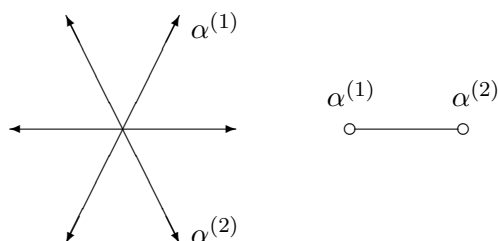


図 6.2: $SU(3)$ のルート図とディンキン図。ディンキン図のルートを指す丸印が 1 本線で結ばれていることは、2 つのルートのなす角度が $2\pi/3$ であることを意味している。また、2 つのルートの長さが等しいので、矢印はない (矢印は長いルートから短いルートの方へ向ける)。

ウエイト図

H_1 と H_2 の同時固有ベクトルと固有値 (それぞれ h_1 と h_2) は (6.55) から次のように求められる³。

同時固有ベクトル	(h_1, h_2)	ディンキン・インデックス	
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$[1, 0]$	
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$[0, -1]$	
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$[-1, 1]$	(6.67)

これらのベクトルを図 6.3 にプロットした。これは $\mu^{(1)}$ を最高ウエイトとする $SU(3)$ の基本表現である $[1, 0]$ 表現であり、3 次元表現 **3** である。(6.67) のウエイトは最高ウエイト $(1/2, \sqrt{3}/6)$ から最初に $\alpha^{(1)}$ を、次に $\alpha^{(2)}$

³ウエイトは H_i の同時固有ベクトルの固有値、ルートはその随伴表現 $\text{ad}(H_i)$ の同時固有ベクトルの固有値の組である。

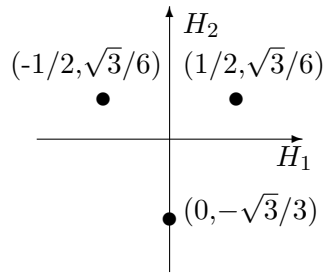


図 6.3: $SU(3)$ の 3 次元基本表現 $\mathbf{3}$ のウエイト図。これは (6.67) のルートベクトルの位置を表している。

を引くことによっても得られる。この順序は $\alpha^{(1)}$ と $\alpha^{(2)}$ のディンキン・インデックスがそれぞれ $[2, -1]$ と $[-1, 2]$ であることによる (もし、最初に $\alpha^{(2)}$ を引くと、引いた後のディンキン・インデックスが $[2, -2]$ となり、 $[1, 0]$ が最高ウエイトであるという仮定に反する。

同様に、もうひとつの基本表現 $[0, 1]$ も求めることができる。この時、 H_1, H_2 の固有ベクトルと固有値 (h_1, h_2) は次のように与えられる。

固有ベクトル	(h_1, h_2)	ディンキン・インデックス	
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$[0, 1]$	
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$[1, -1]$	
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$[-1, 0]$	(6.68)

これらは最高ウエイトから出発して、最初に $\alpha^{(2)}$ を引き、次に、 $\alpha^{(1)}$ を引くことによって得られる。こうして得られたウエイトは、 $(-F_3^*, -F_8^*)$ の同時固有状態の固有値の組であることがわかる。これを複素共役表現であるという。元の表現 ρ のウエイト μ に対して、その複素共役表現 ρ^* のウエイトは $-\mu$ で与えられる。また、 ρ の最高(最低)ウエイトは ρ^* の最低(最高)ウエイトになっている。このように (6.68) は $\mu^{(2)}$ を最高ウエイトとする $SU(3)$ の 3 次元表現 $\mathbf{3}^*$ を与えている。

3 次元表現 $\mathbf{3}$ のディンキン・インデックスとそれに対応するウエイトは

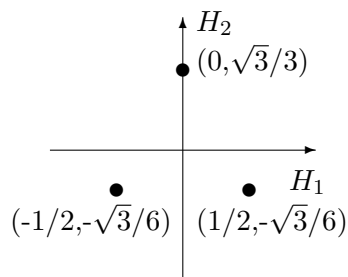


図 6.4: $SU(3)$ の 3 次元基本表現 3^* のウエイト図。これは (6.68) のルートベクトルの位置を表している。

最高ウエイト $\mu^{(1)}$ から出発して次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad [1, 0] \\
 & \qquad \qquad \qquad \downarrow \quad -\alpha^{(1)} \\
 & \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad [-1, 1] \\
 & \qquad \qquad \qquad \downarrow \quad -\alpha^{(2)} \\
 & \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad [0, -1] \qquad (6.69)
 \end{aligned}$$

このように、ルートが異なったウエイトを結ぶ役割を果たすのは、ルートに対応する生成子が異なったウエイトに対応する状態を結ぶ遷移演算子（昇降演算子）となっているからである。

一方、3次元表現 3^* のディンキン・インデックスは最高ウエイト $\mu^{(2)}$ から出発して次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad [0, 1] \\
 & \qquad \qquad \qquad \downarrow \quad -\alpha^{(2)} \\
 & \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad [1, -1] \\
 & \qquad \qquad \qquad \downarrow \quad -\alpha^{(1)} \\
 & \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad [-1, 0] \qquad (6.70)
 \end{aligned}$$

このように、3次元の基本表現が2個あることは、カルタン部分代数のランクが2であることに対応している。

(6.1.2) より $SU(3)$ の構造定数は実数なので、 F_i が交換関係 (6.46) を満足すれば、 $-F_i^*$ も同じ交換関係を満足する。従って、 $\rho(F_i)$ が表現ならば $-\rho^*(F_i)$ もまた表現になる。これを ρ の複素共役表現と言い、 ρ^* で表す。表現 $[0,1]$ は $[1,0]$ の複素共役表現である。実際、(6.68) は $(-F_3^*, -F_8^*)$ の固有値である。このことから、表現 ρ のウエイト μ に対して、 $-\mu$ は複素共役表現 ρ^* のウエイトであることが分かる。なぜなら、複素共役表現のカルタン部分代数は $-H_a^*$ であるが、 H_a がエルミートなので、 $-H_a^*$ の固有値は $-H_a$ の固有値に等しい。従って、既約表現の最高ウエイトの符号を変えたものは、複素共役表現の最低ウエイトであり、その逆も真である。 ρ^* と ρ が同等な時、実表現という。実表現のウエイト図は原点に対して対称である。一般に、既約表現 $[m, n]$ の複素共役表現は $[n, m]$ である。なぜならば、 $[m, n]$ 表現の最高ウエイトは $m\mu^{(1)} + n\mu^{(2)}$ 、最低ウエイトは $-m\mu^{(2)} - n\mu^{(1)}$ で与えられるからである。 $[m, m]$ 表現は実表現である。

基本表現の次に次元の大きな表現は $[2, 0]$ 表現である。この表現のウエイトを具体的に求める。基本表現 $[1, 0]$ 、 $[0, 1]$ の最高ウエイト $\mu^{(1)} = (1/2, \sqrt{3}/6)$ 、 $\mu^{(2)} = (1/2, -\sqrt{3}/6)$ を用いて任意のウエイト $[n, m]$ は $n\mu^{(1)} + m\mu^{(2)}$ で与えられ、また、ルート $\alpha^{(1)}$ と $\alpha^{(2)}$ のディンキンインデックスがそれぞれ $[2, -1]$ と $[-1, 2]$ で与えられることに注意すると、

$$\begin{array}{ccc}
 & [2, 0] & \\
 & \downarrow -\alpha^{(1)} & \\
 & [0, 1] & \\
 -\alpha^{(1)} \swarrow & & \searrow -\alpha^{(2)} \\
 [-2, 2] & & [1, -1] \\
 -\alpha^{(2)} \searrow & & \swarrow -\alpha^{(1)} \\
 & [-1, 0] & \\
 & \downarrow -\alpha^{(2)} & \\
 & [0, -2] &
 \end{array} \tag{6.71}$$

対応するウエイトは次のように与えられる。

$$\begin{array}{c}
 \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
 \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\
 \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \quad \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\
 \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)
 \end{array} \tag{6.72}$$

これは $2\mu^{(1)}$ を最高ウェイトとする 6 次元表現 6 である。6 のウェイト図は次のようになる。同様に、 $[0, 2]$ 表現は複素共役表現 6^* である。そ

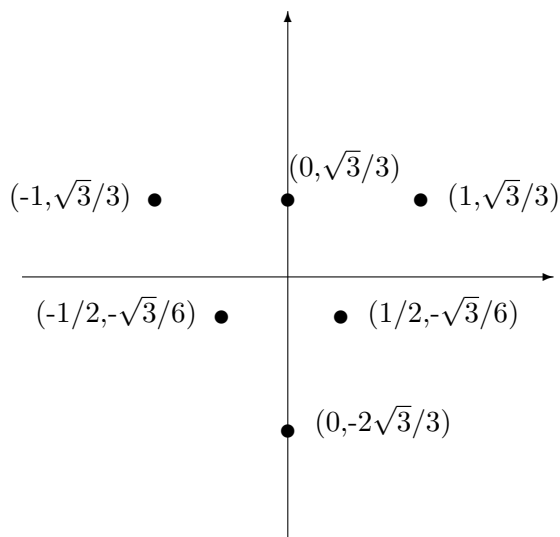


図 6.5: $SU(3)$ の 6 表現のウェイト図。これは (6.72) のルートベクトルの位置を表している。

の他の既約表現も同様に求めることができる。

先に述べたように、ルートは異なったウェイトを結び付ける。これらに対応する演算子はカルタン標準形 (6.66) で与えられる。対応するルートは図 6.6 のように正 6 角形をなし、カルタン部分代数は原点に位置する。

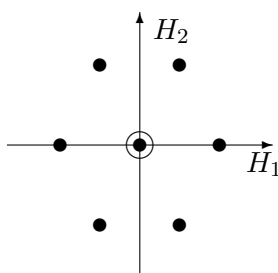


図 6.6: カルタン標準形 (6.66) に対応するルートベクトル。原点はカルタン部分代数で、2 重丸はそれが 2 個あることを図示している。

SU(2) 部分群

SU(3) には SU(2) 部分群が 1 つ含まれているが、その選び方は一意ではない。実際、リー代数 $\mathfrak{su}(3)$ は次のような $\mathfrak{su}(2)$ 部分代数を含む。

$$\begin{aligned}
\text{SU}(2) & F_1, F_2, F_3 \\
\text{SU}(2)_1 & 2F_1, 2F_4, 2F_7 \\
\text{SU}(2)_2 & 2F_1, 2F_6, 2F_5 \\
\text{SU}(2)_3 & 2F_2, 2F_4, 2F_6 \\
\text{SU}(2)_4 & 2F_2, 2F_5, 2F_7 \\
\text{SU}(2)_V & F_4, F_5, \frac{1}{2}(F_3 + \sqrt{3}F_8) \\
\text{SU}(2)_U & F_6, F_7, \frac{1}{2}(-F_3 + 3F_8)
\end{aligned} \tag{6.73}$$

SU(3) の既約表現はその部分群に対しては既約とは限らない。例えば、SU(3) の 3 次元表現 $\mathbf{3}$ は、SU(2) の変換に関しては 2 次元空間と 1 次元空間の直和に分解される。従って、 $\mathbf{3}$ を SU(2) の既約表現に分解すると

$$\mathbf{3} = \mathbf{2} \oplus \mathbf{1} \tag{6.74}$$

となる。これはウエイトを用いると次のように理解できる。(6.73) における SU(2) のカルタン部分代数は F_3 であるから、 F_3 の固有値に着目すると、 $\mathbf{3}$ のウエイト (6.69) において、 $[1, 0]$ と $[0, -1]$ は SU(2) の 2 次元表現のウエイトであり、 $[-1, 1]$ は 1 次元表現のウエイトである。

同様に、 $[2, 0]$ 表現を SU(2) 部分群の既約表現に分解すれば次のようになることが (6.72) から分かる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{6} &= \mathbf{3} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{1} \\
\mathbf{3} &: [2, 0], [1, -1], [0, -2] \\
\mathbf{2} &: [0, 1], [-1, 0] \\
\mathbf{1} &: [-2, 2]
\end{aligned} \tag{6.75}$$

であることが分かる。

次に、SU(2)₁ を考える。この場合、SU(3) の 3 次元表現 $\mathbf{3}$ は (6.43) からわかるように、SU(2)₁ の変換の下でより小さな不変部分空間には分けることができない。SU(2)₁ のカルタン部分代数として $2F_7$ を選ぶと、この固有値は 1, 0, -1 となり、SU(2)₁ の 3 次元行列表現 $\{2F_1, 2F_4, 2F_7\}$ が最高ウエイトが $j = 1$ の表現であることがわかる。この表現の次元は $2j + 1 = 3$ なので、SU(3) の $\mathbf{3}$ はその部分群 SU(2)₁ の $\mathbf{3}$ でもある。SU(3) の 6 次元表現 $\mathbf{6}$ について考えると、これは SU(3) の $[2, 0]$ 表現であるから 2 つの基

本表現 $[1,0]$ の直積表現によって得られる。他方、これを部分群 $SU(2)_1$ の観点からみると、2つの $j=1$ 表現の直積表現のはずである。それを直和表現に分解したときの最高ウエイトは $j=2$ 、すなわち、5次元表現である。従って、次の既約表現分解が得られる。

$$\mathbf{6} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{1} \quad (6.76)$$

カシミア演算子

群の生成子の組み合わせから、群の変換に対して不変な演算子が構成できる時、それをカシミア (Casimir) 演算子と呼ぶ。一般にランク r のコンパクトな単純リー群には r 個のカシミア演算子が存在する。SU(2) はランクが1なので、カシミア演算子が1個存在し、それは

$$\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \quad (6.77)$$

で与えられる。

SU(3) はランクが2なので、2個のカシミア演算子が存在する。そのうち1つは

$$F^2 = \sum_{i=1}^8 F_i^2 \quad (6.78)$$

で与えられる。この演算子がすべての F_i と可換なことは直接の計算により確かめることができる。

もうひとつのカシミア演算子は F_i の3次式で与えられる。

$$F^3 = \sum_{i,j,k=1}^8 d_{ijk} F^i F^j F^k \quad (6.79)$$

ここで、 d_{ijk} は (6.49) で定義された完全対称な量である。

6.1.3 既約表現への分解

リー群あるいはリー代数の既約表現は最高ウエイトによって一意に決まる。そのディンキン・インデックスを $[m^1, m^2, \dots, m^r]$ とすると、この表現は基本表現の直積、あるいは、テンソル積 $m^1 \rho_1 \otimes m^2 \rho_2 \otimes \dots \otimes m^r \rho_r$ によって与えられる。ここでは、SU(3) の任意の既約表現を基本表現のテンソル積を用いて具体的に構成する。

SU(3) の基本表現 $\mathbf{3}$ の基底ベクトルは (6.69) から

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle =: \mathbf{e}_1, \quad \left| 0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\rangle =: \mathbf{e}_2, \quad \left| -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle =: \mathbf{e}_3 \quad (6.80)$$

で与えられ、これらのベクトルの張る 3 次元空間が $\mathfrak{3}$ の表現空間である。この表現空間のベクトルは基底 \mathbf{e}_i を用いて、 $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ と展開できる。同様に、 $\mathfrak{3}^*$ 表現の基底ベクトルは (6.70) から

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle =: \mathbf{e}^1, \left| 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\rangle =: \mathbf{e}^2, \left| -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle =: \mathbf{e}^3 \quad (6.81)$$

で与えられる。

一般に、基本表現のテンソル積の基底ベクトルは

$$\mathbf{e}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} = \mathbf{e}^{i_1} \dots \mathbf{e}^{i_n} \mathbf{e}_{j_1} \dots \mathbf{e}_{j_m} \quad (6.82)$$

と表される。これらの張る mn 次元のベクトル空間がこの直積表現の表現空間である。これらの基底を用いることでこの空間のテンソル \mathbf{v} は次のように展開できる。

$$\mathbf{v} = v_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} \mathbf{e}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \quad (6.83)$$

この表現は一般に既約ではない。

群の変換に対して基底は一般に次のように変換される。

$$\mathbf{e}'_i = U_i^{\dagger j} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}'^i = U_j^i \mathbf{e}^j \quad (U \in \text{SU}(3)) \quad (6.84)$$

これに伴いテンソルの成分は次のように変換される。

$$v'_{i_1 \dots i_n}{}^{j_1 \dots j_m} = U_{k_1}^{i_1} \dots U_{k_n}^{i_n} U_{j_1}^{\dagger l_1} \dots U_{j_m}^{\dagger l_m} v_{k_1 \dots k_n}{}^{l_1 \dots l_m} \quad (6.85)$$

この結果から、テンソルの係数がある表示で対称性を持っていると、その対称性は別な表示でも保たれることが分かる。従って、特定の対称性を持ったテンソルの張る空間は、群の変換に対する不変部分空間になっている。直積表現が既約でないということは、その表現空間が群の変換に対していくつかの不変部分空間の直和になっていることを意味している。このことから、テンソル積の成分の対称性を考えることによって直積表現を既約表現に分解することができる。

不変テンソル

3 次の完全反対称テンソル ϵ^{ijk} は $\text{SU}(3)$ の変換に対して不変である。実際、

$$\epsilon^{ijk} U_i^l U_j^m U_k^n = \epsilon^{lmn} (\det U) = \epsilon^{lmn} \quad (6.86)$$

同様にして、 ϵ_{ijk} および δ_j^i も $\text{SU}(3)$ の変換に対して不変であることが分かる。これらを変換テンソル (invariant tensor) という。

以下いくつかの具体例を考える。

直積空間 $3 \otimes 3$ の既約分解

直積空間のテンソル成分は $v^{ij} = v^i v^j$ ($i, j = 1, 2, 3$) である。これを添え字の交換に対して対称な成分と反対称な成分に分ける。

$$v^{ij} = v^{(i,j)} + v^{[i,j]} \quad (6.87)$$

ここで

$$v^{(i,j)} = \frac{1}{2}(v^{ij} + v^{ji}), \quad v^{[i,j]} = \frac{1}{2}(v^{ij} - v^{ji}) \quad (6.88)$$

$v^{(i,j)}$ は群の変換に対して対称な成分から対称な成分へと移るので、6次元の不変部分空間を作る（対称な3行3列の行列は6個の独立な成分を持つ）。従って、 $v^{(i,j)}$ は6次元の不変部分空間を張り、SU(3)の既約表現6の表現空間である。他方、 $v^{[i,j]}$ は3次元の不変部分空間のテンソル成分を構成する。今、 ϵ_{ijk} を3階の完全反対称テンソルとすると、 $v_i = \epsilon_{ijk} v^{[i,j]}$ は 3^* の変換性を持ち、 3^* の表現空間のテンソルである。従って、次のような既約表現への分解が得られる。

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^* \quad (6.89)$$

直積空間 $3 \otimes 3^*$ の既約分解

この直積空間のテンソルは $v_j^i = v^i v_j$ である。これは次のように分解できる。

$$v_j^i = \left(v_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i v_k^k \right) + \frac{1}{3} \delta_j^i v_k^k \quad (6.90)$$

ここで右辺の第一項はトレースがゼロの行列であり、8個の自由度を持つ。第二項は群の変換に対してスカラーとして振る舞う。よって、次の既約分解が得られる。

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1 \quad (6.91)$$

6.1.4 ヤング図

ヤング図の書き方

以上の既約分解は、ヤング図を用いることによって簡便に求めることができる。ヤング図では表現ベクトル v^i に \square を対応させ、同じ行に並んだ数字はそれらの入れ替えに対して対称、同じ列に並んだ数字は反対称であると約束する。SU(3)の場合を考えると、4個以上の \square が縦並びになる

ことはなく、また、3個の□が縦並びになるのは1通りしか存在しないので、これは恒等表現に対応する。すなわち

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 1$$

例として、2つのベクトルの直積 $v^i v^j$ のうち、対称テンソル $v^{(i,j)}$ には

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

が対応し、反対称テンソル $v^{[i,j]}$ には

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

が対応する。

(6.91) から分かるように、(6.90) の右辺の第一項は8次元表現8に対応している。この項は完全反対称テンソル ϵ^{ijk} を用いて次のように表すことができる。

$$u^{ijk} = \epsilon^{ijl} \left(v_l^k - \frac{1}{3} \delta_l^k v_m^m \right) \tag{6.92}$$

この量は定義から分かるように、 i, j について反対称なので、ヤング図としては $\begin{array}{|c|c|} \hline i & k \\ \hline j & \\ \hline \end{array}$ が対応する。これは、次の8種類ある。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

一般に、 $[n, m]$ 表現の表現空間のテンソル $v_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$ は n 個の基本表現 $[1, 0]$ のベクトル v^i と m 個の基本表現 $[0, 1]$ のベクトル v_j の直積によって得られるから、上付きの添え字同士の交換、あるいは、下付き同士の交換にたいして対称で、かつ、トレースレスの条件

$$\delta_{i_1}^{j_1} v_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} = 0 \tag{6.93}$$

を満たすものが既約表現である。もし、トレースがゼロでないとする、それは $[n-1, m-1]$ 表現 (あるいはより小さい表現) に属するから既約性に反する。 ϵ^{ijk} を用いて下付きの添え字をすべて上付き添え字に変えることができるから、既約な $[n, m]$ 表現のテンソルは次のように書ける。

$$u^{k_1 l_1 \dots k_m l_m i_1 \dots i_n} = \epsilon^{k_1 l_1 j_1} \dots \epsilon^{k_m l_m j_m} v_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \tag{6.94}$$

ここで、定義により左辺の量は k_1 と l_1, \dots, k_m と l_m の交換に対しては反対称、また、 k_1, \dots, k_m あるいは i_1, \dots, i_n の間の交換に対しては対称なので、次の図形に対応する。

k_1	\cdots	k_m	i_1	\cdots	i_n
l_1	\cdots	l_m			

このとき2重に数えるのを防ぐために、各行では左から右に数字が大きくなるように番号をつけるものと約束する。すなわち、

$$k_1 \leq \cdots \leq k_m \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n, \quad l_1 \leq \cdots \leq l_m \quad (6.95)$$

更に、左端の列において上から下に数字が大きくなるように ($k_1 < l_1$) 配列する。そのように配列された図をヤング図 (Young tableau) という。

既約表現の次元

次に、ヤング図が与えられた時に、それに対応する既約表現の次元を与える公式を導く。それは、 $[n, m]$ 表現の独立なテンソル成分の数に等しい。 $v_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$ において、上付き添え字は1,2,3を重複を許して、しかも、(6.95) を満足しつつ並べたものなので、場合の数は ${}_{n+2}C_2$ である。同様に、下付き添え字の並べ方は ${}_{m+2}C_2$ 通りある。トレースレスの条件 (6.93) は ${}_{m+1}C_2 \times {}_{n+1}C_2$ 個の関係式を与えるので、独立なテンソルの数は

$$\begin{aligned} D(m, n) &= {}_{n+2}C_2 \times {}_{m+2}C_2 - {}_{m+1}C_2 \times {}_{n+1}C_2 \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2) \end{aligned} \quad (6.96)$$

となる。たとえば、 $[2, 2]$ 表現の次元は $D(2, 2) = 27$ 、 $[3, 0]$ 表現の次元は $D(3, 0) = 10$ である。

直積表現の既約表現の分解

ヤング図を用いると直積表現の既約表現の分解を図式的に行える。2つの既約表現 A と B の直積表現 $A \otimes B$ の既約表現への分解を考える。 B の1行目の箱に a 、2行目の箱に b というラベルをつける。その上で、次の規則に従って B を A にくっつける。

- B のヤング図の第1行から a を1個ずつとり、それを A にくっつける。
- 次に、 b を1個ずつとり、それを A にくっつける。

- くっついた図を右から左へ、上から下へ見た時、 a の数は b の数を下回ってはならない。

以下、いくつかの具体例を挙げよう。まず、

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \\ \hline a \\ \hline \end{array} \quad \text{から次の既約分解が得られる。}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^* \quad (6.97)$$

次に、 $\square \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & \\ \hline b & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \\ \hline a \\ \hline \\ \hline b \\ \hline \end{array}$ より

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}^* \quad (6.98)$$

が得られる。ここで、右辺の 8 は (6.92) の下のヤング図の数からわかる。

6.2 直交群

6.2.1 SO(3)

SO(3) は 3 次元特殊直交群全体のなす群である。SO(3) の生成子 T_i が満たす交換関係は

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (6.99)$$

で与えられる。これは、SU(2) の交換関係 (6.1) と同じ形である。これは 2 つの群 SO(3) と SU(2) の単位元近傍の構造が同じであることを意味しており、SO(3) と SU(2) は局所同型であるという。

SU(2) のリー代数 $\{J_1, J_2, J_3\}$ の随伴表現 $\text{ad}(J_i)$ は構造定数によって与えられることに注意すると ((3.71) 参照)

$$\{\text{ad}(J_i)\}_{jk} = i\epsilon_{ikj} = (T_i)_{jk} \quad (6.100)$$

となる。これは SU(2) の随伴表現と同じである。従って、SU(2) の随伴表現 $\text{Ad}(SU(2))$ は SU(2) から SO(3) の上への準同型写像である。

$$SU(2) \sim \text{Ad}(SU(2)) = SO(3) \quad (6.101)$$

SU(2) の中心 $Z = \{1, -1\}$ に対して、 $\text{Ad}(\pm 1) = 1$ なので、 Z は準同型写像 $SU(2) \rightarrow \text{Ad}(SU(2)) = SO(3)$ の核である。従って、準同型定理により SO(3) は $SU(2)/Z$ に同型である。このことから、一般に SO(3) の元 h に対して、 $\text{Ad}(\pm g) = h$ となる SU(2) の元が 2 個 $\pm g$ 存在する。定理 21 より、SU(2) は (6.99) の交換関係によって一意に決まる単純リー群であり、定理 22 に

より、 $SU(2)$ は $SO(3)$ の普遍被覆群になっている。 $SU(2)$ は $SO(3)$ の 2 価表現 (double-valued representation, double cover) であるともいう。また、 $SO(3)$ は 2 重連結であるともいう。

以上の議論から、 $SU(2)$ の既約表現 D_2 を用いて $SO(3)$ のすべての既約表現 D_3 を得ることができる。実際、 $\forall g \in SU(2)$ に対して

$$D_2(g) = D_3(\text{Ad}(g)) \quad (6.102)$$

は $SU(2)$ の一つの表現である。これにより、 $SO(3)$ の任意の既約表現から $SU(2)$ の既約表現が得られる。しかし、 $SU(2)$ は $SO(3)$ の double cover なので、前者の既約表現から後者のそれが一意に得られるとは限らない。一意に決まるためには、 $D_2(-g) = D_2(g)$ 、すなわち、条件

$$D_2(-1) = 1 \quad (6.103)$$

が満たされていることが必要かつ十分である。このことから、 $SU(2)$ の既約表現から (6.103) を満たすものを選べば、それが $SO(3)$ の既約表現である。

さて、 $SU(2)$ の元

$$g(\theta) = e^{\frac{i}{2}\sigma_3\theta} = \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.104)$$

は $g(2\pi) = -1$ を満たす。従って、最高ウエイト j の既約表現 $D_2^{[j]}$ に対して $\theta = 2\pi$ を代入して、

$$\begin{aligned} D_2^{[j]}(-1) &= \exp(2\pi i\rho(H_3)) \\ &= \begin{pmatrix} e^{2\pi i j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(j-1)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{-2\pi i j} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.105)$$

が得られる。 $SU(2)$ の既約表現の最高ウエイトは $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ であるから、条件 (6.105) を満たす $SU(2)$ の表現の最高ウエイトは整数でなければならない。こうして、 $SU(2)$ の既約表現の中から、最高ウエイトが整数の部分を取り出すことによって $SO(3)$ の既約表現が得られる。

$$\begin{aligned} D_3^{[m]}(h) &= D_2^{[m]}(\pm g), \quad g \in SU(2), \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ h &= \text{Ad}(\pm g) \in SO(3) \end{aligned} \quad (6.106)$$

$SU(2)$ の表現のうちで、最高ウエイトが半整数のもの ($j = 1/2, 3/2, \dots$) は、同一の $h \in SO(3)$ に対して、2つの表現 $\pm D_2^{[j]}(g)$ が対応するので、これを $SO(3)$ の 2 価表現、あるいは、スピノル表現という。しかし、これは普通の意味での $SO(3)$ の表現という意味ではなく、その普遍被覆群である $SU(2)$ の表現であることに注意しよう。

スピノ群

一般に、 $SO(n)$ は単連結ではなく、その普遍被覆群はスピノ群 (spin group) とよばれ、 $Spin(n)$ と書く。 $SO(3)$ の普遍被覆群は $SU(2)$ なので、 $Spin(3)=SU(2)$ である。準同型写像 $Spin(n) \rightarrow SO(n)$ の核は Z_2 で、準同型定理により

$$Spin(n)/Z_2 \cong SO(n) \quad (6.107)$$

$SO(n)$ の中心は

$$SO(n) \text{ の中心} = \begin{cases} Z_2 \times Z_2 & \text{if } n = 4m \\ Z_4 & \text{if } n = 4m + 2 \\ Z_2 & \text{if } n = 4m \pm 1 \end{cases} \quad (6.108)$$

$SO(n)$ のすべての元と可換で、かつ、 $\det h = 1$ を満たす元 h は、シュアのレンマ (定理 10) により $h = a1$ であるが、 $\det h = 1$ より、 $a = \pm 1$ である。よって、 n が奇数のときは $h = 1$ 、偶数のときは $h = \pm 1$ である。

スピノ群 $Spin(n)$ と $SO(n)$ の同型関係は次の通りである。

$$Spin(3) \cong SU(2) \quad (6.109)$$

$$Spin(3)/Z_2 \cong SO(3) \quad (6.110)$$

$$Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2) \quad (6.111)$$

$$Spin(4)/Z_2 \cong SO(4) \quad (6.112)$$

$$Spin(4)/Z_2 \times Z_2 \cong SO(3) \times SO(3) \quad (6.113)$$

$$Spin(5)/Z_2 \cong SO(5) \quad (6.114)$$

$$Spin(6) \cong SU(4) \quad (6.115)$$

$$Spin(6)/Z_2 \cong SO(6) \quad (6.116)$$

$$Spin(6)/Z_4 \cong SO(6)/Z_2 \quad (6.117)$$

$$Spin(2m+1)/Z_2 \cong SO(2m+1) \quad (6.118)$$

$$Spin(4m)/Z_2 \cong SO(4m)/Z_2 \quad (6.119)$$

$$Spin(4m)/Z_2 \times Z_2 \cong SO(4m)/Z_2 \quad (6.120)$$

$$Spin(4m+2)/Z_2 \cong SO(4m+2) \quad (6.121)$$

$$Spin(4m+2)/Z_4 \cong SO(4m+2)/Z_2 \quad (6.122)$$

6.2.2 $SO(N)$

N 次元直交群 $SO(N)$ のリー代数は、 N 次元実交代行列 M の全体で与えられる。 M は一般に ${}_N C_2 = N(N-1)/2$ 個の実数のパラメータ $t^{ab} = -t^{ba}$

$(a, b = 1, \dots, N)$ を用いて次のように表される。

$$M = \sum_{a>b} X_{ab} t^{ab} \quad (6.123)$$

$$(X_{ab})_{jk} = \delta_{aj} \delta_{bk} - \delta_{bj} \delta_{ak} \quad (6.124)$$

これから $SO(N)$ の生成元 $T_{ab} = -iX_{ab}$ は次の交換関係に従うことが分かる。

$$[T_{ab}, T_{cd}] = -i(\delta_{bc} T_{ad} - \delta_{ac} T_{bd} - \delta_{bd} T_{ac} + \delta_{ad} T_{bc}) \quad (6.125)$$

T_{ab} のうち、互いに可換なものはカルタン部分代数を構成する。その元として次のものをとる。

$$H_l = T_{2l-1, 2l} \quad (l = 1, 2, \dots, [N/2]) \quad (6.126)$$

ここで、 $[N/2]$ は $N/2$ を超えない最大の整数である。

カルタン部分代数の任意の元 H_i と任意の元 T_{ab} との交換関係を (6.125) を用いて計算すると

$$[H_i, T_{2j-1, 2k-1}] = i(\delta_{ij} T_{2j, 2k-1} + \delta_{ik} T_{2j-1, 2k}) \quad (6.127)$$

$$[H_i, T_{2j, 2k-1}] = i(-\delta_{ij} T_{2j-1, 2k-1} + \delta_{ik} T_{2j, 2k}) \quad (6.128)$$

$$[H_i, T_{2j-1, 2k}] = i(\delta_{ij} T_{2j, 2k} - \delta_{ik} T_{2j-1, 2k-1}) \quad (6.129)$$

$$[H_i, T_{2j, 2k}] = i(-\delta_{ij} T_{2i-1, 2k} - \delta_{ik} T_{2j, 2k-1}) \quad (6.130)$$

$$[H_i, E_{\pm\alpha}] = \pm\alpha_i E_{\pm\alpha} \quad (6.131)$$

を満足する生成子 E_α とルート α を求めることができる。

6.2.3 クリフォード代数

クリフォード代数は、スピノル表現の別な表し方を与える。 $SO(N)$ は座標 x_1, \dots, x_N に対する直交変換であり、2次形式 $x_1^2 + \dots + x_N^2$ を不変にする。今、この2次形式を1次形式の自乗の形に書くことを考える。

$$x_1^2 + \dots + x_N^2 = (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_N x_N)^2 \quad (6.132)$$

これを満足する係数 γ_i は c -数では存在できず、次のような反交換関係を満足する必要がある。

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (6.133)$$

この条件を満足する行列全体のなす代数をクリフォード代数 (Clifford algebra) という。1 次形式 $\gamma_i x_i$ (i については和をとるものとする) は、 x_i と γ_i の同時直交変換に対して不変である。すなわち、

$$x'_i = O_{ik} x_k, \quad \gamma'_i = O_{ik} \gamma_k \quad (6.134)$$

に対して

$$\gamma'_i x'_i = O_{ik} \gamma_k O_{il} x_l = \delta_{kl} \gamma_k x_l = \gamma_i x_i \quad (6.135)$$

が成立する。また、この時反交換関係 (6.133) が保たれることも容易に示すことができる。

反交換関係を満足する γ 行列の全体 $\{\gamma_i\}$ は一つのベクトル空間を張っているので、変換後の γ 行列 γ'_i は元の γ 行列と相似変換で関係づけられているはずである。これは、

$$A' \psi' := S(A\psi) = (SAS^{-1})(S\psi) \quad (6.136)$$

で、 A を γ_i 、 $|\psi\rangle$ を状態ベクトル ψ_a とみると理解しやすいだろう。すなわち、

$$\gamma'_i = S(O) \gamma_i S^{-1} \quad (6.137)$$

$$\psi'_a = S(O)_{ab} \psi_b \quad (6.138)$$

このように変換される状態ベクトル ψ_a をスピノルとよぶ。 O として微小回転

$$O_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji} \quad (6.139)$$

をとり、 ϵ_{ij} を微小量だと考えて $S(O)$ を展開すると

$$S(O) = 1 + iT_{ij} \epsilon_{ij} \quad (6.140)$$

これが (6.137)-(6.139) とコンシステントであるための条件を調べるためにまず、(6.139) を (6.137) に代入すると

$$\gamma'_i = \gamma_i + \epsilon_{ik} \gamma_k \quad (6.141)$$

次に、(6.140) を (6.137) に代入すると

$$\begin{aligned} \gamma'_i &= (1 + iT_{jk} \epsilon_{jk}) \gamma_i (1 - iT_{jk} \epsilon_{jk}) \\ &= \gamma_i + i[T_{jk}, \gamma_i] \epsilon_{jk} \end{aligned} \quad (6.142)$$

(6.141) と (6.142) の右辺が一致するためには次の条件が成立すればよいことを直接確かめることができる ((6.143) を (6.142) に代入すれば (6.141) が得られる)。

$$[T_{ij}, \gamma_k] = -i(\gamma_i \delta_{jk} - \gamma_j \delta_{ik}) \quad (6.143)$$

この条件を満たす T_{ij} は次のように与えられることが分かる。

$$T_{ij} = \frac{1}{4i} [\gamma_i, \gamma_j] =: \frac{1}{2} \sigma_{ij} \quad (6.144)$$

実際、(6.144) を (6.143) へ代入して公式

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{C, A\}B \quad (6.145)$$

を用いる。

$$[AB - BA, C] = A\{B, C\} - \{C, A\}B - B\{A, C\} + \{B, C\}A \quad (6.146)$$

なので、反交換関係が c-数の時は

$$[[A, B], C] = 2(A\{B, C\} - \{C, A\}B) \quad (6.147)$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} [T_{ij}, \gamma_k] &= \frac{1}{2i} [\gamma_i \gamma_j, \gamma_k] \\ &= \frac{1}{i} (\gamma_i \delta_{jk} - \gamma_j \delta_{ik}) \end{aligned} \quad (6.148)$$

となり、(6.143) が成立することが分かる。この T_{ij} は $SO(N)$ の交換関係 (6.125) を満足するので、 T_{ij} は $SO(N)$ のリー代数であり、以下に示すように $Spin(N)$ のスピノル表現になっている。すなわち、上記の $O \rightarrow S(O)$ の対応によってスピノル群 $Spin(N)$ のスピノル表現が得られる。

クリフォード代数のすべての独立な基底は γ 行列の積から与えられる。

$$\gamma_{i_1 \dots i_r} = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq N) \quad (6.149)$$

各 r に対して ${}_N C_r$ 個の独立な基底が存在する。従って、クリフォード代数の次元は

$$\sum_{r=0}^N {}_N C_r = 2^N \quad (6.150)$$

である。特に、 N が偶数 $N = 2n$ の時 γ 行列は $2^n \times 2^n$ 行列であり、スピノル ψ は 2^n 次元ベクトル空間を張る。これをスピノル空間という。

γ 行列は n 個のパウリ行列のテンソル積として次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \sigma_2^1 \sigma_3^2 \cdots \sigma_3^n \\
 \gamma_2 &= -\sigma_1^1 \sigma_3^2 \cdots \sigma_3^n \\
 \gamma_3 &= \sigma_0^1 \sigma_2^2 \sigma_3^3 \cdots \sigma_3^n \\
 \gamma_4 &= -\sigma_0^1 \sigma_1^2 \sigma_3^3 \cdots \sigma_3^n \\
 &\vdots \\
 \gamma_{2n-1} &= \sigma_0^1 \cdots \sigma_0^{n-1} \sigma_2^n \\
 \gamma_{2n} &= -\sigma_0^1 \cdots \sigma_0^{n-1} \sigma_1^n
 \end{aligned} \tag{6.151}$$

ここで、 σ_0 は 2 行 2 列の単位行列である。さらに、

$$\gamma_{2n+1} = (-i)^n \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{2n} = \sigma_3^1 \sigma_3^2 \cdots \sigma_3^n \tag{6.152}$$

を導入する。 γ_{2n+1} は他のすべての γ 行列と反可換でかつ $\gamma_{2n+1}^2 = 1$ が成立する。(このことから γ_{2n+1} の固有値は ± 1 であることに注意せよ。) ゆえに、

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n+1) \tag{6.153}$$

$SO(2n)$ のリー代数は、 $2n$ 個の γ 行列 (6.152) から計算される (6.144) の T_{ij} によって与えられる。しかし、その 2^n 次元の表現空間は既約ではない。実際、この表現は γ_{2n+1} の固有値 ± 1 によって 2 つの 2^{n-1} 次元の既約表現へと分解される。そこで、 $\gamma_{2n+1} = 1$ に対応する既約なスピノル表現を ρ_n 、 $\gamma_{2n+1} = -1$ に対応するスピノル表現を ρ_{n-1} と書こう。

$SO(2n+1)$ のリー代数は、 γ_{2n+1} までを含めた $2n+1$ 個の γ 行列を用いて計算された T_{ij} がリー代数をなす。その表現空間の次元は 2^n であり、 $SO(2n+1)$ のスピノル表現を構成する。

$SU(n)$ の生成元の構成

γ 行列を用いることで、 $SU(n)$ の生成元を次のように構成することができる。まず、

$$A_i = \frac{1}{2}(\gamma_{2i-1} - i\gamma_{2i}) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{6.154}$$

この A_i は

$$\{A_i, A_j\} = \{A_i^\dagger, A_j^\dagger\} = 0, \quad \{A_i, A_j^\dagger\} = \delta_{ij} \tag{6.155}$$

更に、トレースレスな n 行 n 列のエルミート行列 T_a に対して

$$T_a = \sum_{i,j} A_i^\dagger (T_a)_{ij} A_j \quad (6.156)$$

を定義すると、 T_a は $SU(n)$ の生成元となる。

6.2.4 角運動量

粒子の座標ベクトル \mathbf{r} を単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ の周りに角度 $\delta\theta$ だけ回転させる無限小回転 $R(\delta\theta)$ を考える。ここで $\delta\theta = \hat{\mathbf{n}}\delta\theta$ である。このとき、回転した後のベクトル \mathbf{r}' は元のベクトル \mathbf{r} と次の関係で結ばれている。

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{r} = \mathbf{r} + \delta\theta \times \mathbf{r} \quad (6.157)$$

この粒子の波動関数を $\psi(\mathbf{r})$ 、回転した後の波動関数を $\psi'(\mathbf{r}')$ とすると、 \mathbf{r} と \mathbf{r}' が (6.157) で結ばれている限り、これら二つの波動関数は粒子の同じ状態を表しているのだから等しくなければならない。

$$\psi'(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}) \quad (6.158)$$

これから

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{r}) &= \psi(R^{-1}\mathbf{r}) \\ &= \psi(\mathbf{r} - \delta\theta \times \mathbf{r}) \\ &= \psi(\mathbf{r}) - (\delta\theta \times \mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta\theta \cdot \mathbf{L}\right) \psi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.159)$$

ここで、 $\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は軌道角運動量演算子である。これから有限の角度の回転に対する変換は

$$U(\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta \cdot \mathbf{L}\right) \quad (6.160)$$

で与えられることが分かる。

以上の議論から、 $SO(3)$ のリー代数は $\{L_x, L_y, L_z\}/\hbar$ で与えられ、表現空間は波動関数の全体であることが分かる。特に、 L_z をカルタン部分代数に取れば、 $SO(3)$ の既約表現は軌道角運動量の固有関数 $|l, m\rangle$ で与えられ、 l は最高ウエイト、磁気量子数 m がウエイトになっている。

$$L_z|l, m\rangle = m|l, m\rangle \quad (m = l, l-1, \dots, -l) \quad (6.161)$$

ここで、 θ が 2π の整数のとき $U = 1$ でなければならないので、 l は 0 以上の整数でなければならない。

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.162)$$

カシミア演算子 $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ の固有値は

$$L^2|l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2|l, m\rangle \quad (6.163)$$

で与えられる。

さて、量子力学における角運動量 \mathbf{J} は一般には交換関係

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \quad (6.164)$$

を満たす線形演算子として定義される。これは一般に $SO(3)$ の単連結な普遍被覆群 $\text{Spin}(3)=SU(2)$ を一意に与える。 $SU(2)$ は $SO(3)$ を含み、かつ、それ以外のスピノル表現 ($SO(3)$ もスピノル表現である) も含んでいる。そこで、 \mathbf{J} を全角運動量、 $\mathbf{S} := \mathbf{J} - \mathbf{L}$ をスピン角運動量を定義する。スピン角運動量は軌道角運動量とは独立な量であり、演算子は交換し ($[S_i, L_j] = 0$)、

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k \quad (6.165)$$

を満足する。 S_i/\hbar は $SU(2)$ のリー代数なので、スピン角運動量の固有状態は $SU(2)$ の既約表現によって与えられる。 S_z をカルタン部分代数、既約表現は最高ウェイトを s とウェイト s_z によって一意にきまる。

$$S_z|s, s_z\rangle = s_z\hbar|s, s_z\rangle \quad (s_z = s, s-1, \dots, -s) \quad (6.166)$$

ここで、 s と $-s$ との差は整数でなければならないので

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (6.167)$$

全角運動量 $J_i = L_i + S_i$ の固有状態は、軌道角運動量とスピン角運動量の固有状態の直積状態を用いて構成することができる。その時の係数が Sec. 6.1.1 で述べたクレブシュ - ゴルダン係数である。

$$|l, m\rangle|s, s_z\rangle = \sum_{j=|l-s|}^{l+s} \langle j, m+s_z|l, m; s, s_z\rangle|j, m+s_z\rangle \quad (6.168)$$

6.2.5 水素原子の隠れた対称性: SO(4)

水素原子のハミルトニアン

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.169)$$

は空間回転に対して不変であるので、空間回転の生成子である軌道角運動演算子 L_i ($i = 1, 2, 3$) は H と可換である。異なった L_i は互いに交換しないので、その中の一つ、たとえば L_3 と H は同時固有値を持つ。このことは、 L_3 の固有値 m に対してエネルギーが縮退していることを意味している。ところが、水素原子の場合は、それに加えて、全角運動量 $l = 0, 1, \dots, l_{\max} = n - 1$ (n は主量子数) に対してもエネルギーが縮退していることが知られている。この縮退はしばしば偶然縮退 (accidental degeneracy) と呼ばれている。磁場をかけると磁気量子数 m に関する縮退は解け、固有エネルギーは n と m に依存するようになる。しかし、 l に関する縮退は依然として解けない。実は、 l に関する縮退は、ルンゲ - レンツベクトル (Runge-Lenz vector) という保存量が存在することに起因している。

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{L}}{2m} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \mathbf{r}. \quad (6.170)$$

この保存則は、クーロンポテンシャルが $1/r$ に比例するという力の法則に起源があるので、力学的対称性 (dynamical symmetry) と呼ばれる。ルンゲ - レンツベクトルを成分で書くと次のようになる。

$$R_i = \frac{1}{2m} \epsilon_{ijk} L_j p_k + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} x_i \quad (6.171)$$

ルンゲ - レンツベクトルが保存することは、 R_i が H と交換することから示すことができる。これは次の交換関係を用いて示せる。

$$[L_i, x_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} x_k \quad (6.172)$$

$$[L_i, p_j] = \hbar \epsilon_{ijk} p_k \quad (6.173)$$

$$\left[L_i, \frac{1}{r} \right] = i\hbar \frac{x_i}{r^3} \quad (6.174)$$

これらを用いると

$$\left[\frac{1}{r}, R_i \right] = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\left(p_i \frac{1}{r} + \frac{1}{r} p_i \right) - \frac{1}{r^3} (p_k x_k x_i - x_i x_k p_k) \right] \quad (6.175)$$

$$[p_i^2, R_i] = -i\hbar \left[\left(p_i \frac{1}{r} + \frac{1}{r} p_i \right) - \frac{1}{r^3} (p_k x_k x_i - x_i x_k p_k) \right] \quad (6.176)$$

が示せる。これらから

$$[H, R_i] = 0 \quad (6.177)$$

であることが分かる。

次に、 R_i によって生成される群の性質を調べよう。生成子の交換関係は

$$[R_i, R_j] = -\frac{2i\hbar}{2m} \epsilon_{ijk} L_k H, \quad (6.178)$$

$$[L_i, R_j] = -i\hbar \epsilon_{ijk} R_k \quad (6.179)$$

H は L_i および R_i と可換なので同時対角化可能である。従って、以下の議論ではある特定のエネルギー固有値 E に対して考える。この時、(6.178) より

$$A_i := \sqrt{-\frac{m}{2E}} R_i \quad (6.180)$$

を定義すると、

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i, A_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} A_k, \quad [A_i, A_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (6.181)$$

ここで、

$$M_i := \frac{L_i + A_i}{2}, \quad N_i := \frac{L_i - A_i}{2} \quad (6.182)$$

を導入すると (6.181) は次のように書き換えられる。

$$[M_i, M_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} M_k, \quad [N_i, N_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} N_k, \quad [M_i, N_j] = 0 \quad (6.183)$$

こうして、 $\{M_1, M_2, M_3\}$ と $\{N_1, N_2, N_3\}$ はそれぞれ閉じたりー代数を構成することが分かる。それゆえ、水素原子の各エネルギー固有状態は $SU(2) \times SU(2)$ の変換に対して不変である。 $SU(2) \times SU(2)$ は $SO(4)$ に局所同型であり、空間の回転群 $SO(3)$ はその部分群である。実際、 $SO(4)$ の6個の生成子を次のように定義することができる。

$$L^{ij} = \frac{1}{\hbar} \epsilon_{ijk} L_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (6.184)$$

$$L^{4i} = \frac{1}{\hbar} A_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.185)$$

さて、(6.183) より、 M^2, M_3, N^2, N_3 の固有値は直ちに分かる。

$$\begin{aligned} M^2 &= \hbar^2 a(a+1) \quad (a = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots) \\ M_3 &= \hbar \mu \quad (\mu = a, a-1, \dots, -a) \end{aligned} \quad (6.186)$$

$$\begin{aligned} N^2 &= \hbar^2 b(b+1) \quad (b = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots) \\ N_3 &= \hbar \nu \quad (\nu = a, a-1, \dots, -a) \end{aligned} \quad (6.187)$$

ここで

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R} = 0 \quad (6.188)$$

なので

$$M^2 = N^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2) \quad (6.189)$$

が示せる。これから、固有状態の量子数は $a = b$ でなければならない。また、

$$\mathbf{A}^2 = -\frac{m}{2E}\mathbf{R}^2 = -(\mathbf{L}^2 + \hbar^2) - \frac{m}{2E}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \quad (6.190)$$

なので

$$\frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2) = -\frac{1}{4}\left[\hbar^2 - \frac{m}{2E}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right] = \hbar^2 a(a+1) \quad (6.191)$$

が示せる。これからエネルギー固有値は

$$E = -\frac{m}{2\hbar^2 n^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \quad (6.192)$$

と決まる。ここで、 $n := 2a+1 = 1, 2, \dots$ は主量子数である。このように、水素原子の主量子数を決める a は (6.182) からわかるように $SU(2) \times SU(2)$ の既約表現の最高ウェイトであり、表現の次元は $(2a+1)^2 = n^2$ である。

一方、軌道角運動量は

$$L_i = M_i + N_i \quad (6.193)$$

なので、 \mathbf{L} は2つの $SU(2)$ “角運動量” \mathbf{M} と \mathbf{N} の合成角運動量であることが分かる。従って、 l のとりうる値は $|a-b| \leq l \leq a+b$ であり、かつ、 $a=b$ なので $l = 0, 1, \dots, 2a = n-1$ である。

ベクトル量 $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$ に対応する球テンソル演算子

$$N_1^{\pm 1} = \mp \frac{N_x \pm iN_y}{\sqrt{2}}, \quad N_1^0 = N_z. \quad (6.194)$$

を導入しよう。 N_1^1 は H と交換する ($[H, N_1^1] = 0$) ので、 N_1^1 を状態 $|n, l, l\rangle$ に作用させると、同じエネルギーを持つ別の状態が生じる。球テンソル N_1^1 は角運動量と磁気量子数をそれぞれ 1 個ずつ増加させる役割を果たすので、

$$N_1^1 |n, l, l\rangle = c |n, l+1, l+1\rangle \quad (6.195)$$

が得られる。こうして、 N_1^1 を次々と作用させていくことで、同じ n を持つ異なった l の最高ウエイトを持った状態 $|n, l+k, l+k\rangle$ を得ることができ、この状態に今度は L_- を作用させることによって、与えられた l に対して異なったウエイト m を持った状態が得られる。与えられた n に対して、そのようにして得られる状態の総数は

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \quad (6.196)$$

である。

6.3 ローレンツ群

6.3.1 特殊相対性理論

特殊相対性理論は、物理法則がすべての慣性系で同じ形をとるという特殊相対性原理と、真空中の光速 c がどの慣性系からみても一定であるという光速不変の原理から構成される。今、ある慣性系 K の座標原点から時刻 $t = 0$ に発せられた光の時刻 t での座標を (x, y, z) とすると、

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (6.197)$$

が成立する。いま、 K に対して速度 \mathbf{v} で運動している別な慣性系 K' を考える。時刻 $t = t' = 0$ で 2 つの慣性系の座標が一致していると仮定しよう。この時、光速不変の原理により、 K' から見ても光速は一定 c であるので

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (6.198)$$

が成立する。一般に (6.198) が成立すれば (6.197) が成立しなければならない。そのような関係式のうちでもっとも簡単なものは、

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \kappa(\mathbf{v})(c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2) \quad (6.199)$$

空間が等方的であれば $\kappa(\mathbf{v}) = \kappa(v)$ である。さらに、 K が K' に対して速度 \mathbf{v} で運動している場合を考えると、

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \kappa(v)(c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2) \quad (6.200)$$

が成立しなければならない。それゆえ、 $\kappa(v) = 1$ であることがわかる。結局、2つの慣性系の間では $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ が不変であることがわかる。そこで

$$x^0 := ct, \quad x^1 := x, \quad x^2 := y, \quad x^3 := z \quad (6.201)$$

とおくと、2つの慣性系の間で

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \text{一定} \quad (6.202)$$

特に、 K' 系が K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動している時、 $y = y', z = z'$ なので、

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 \quad (6.203)$$

この関係式を満たすローレンツ変換は次の通りである。

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.204)$$

ここで $\beta := v/c$ である。(6.204) から速度ベクトルの成分を $u_i := dx^i/dx^0$ と定義すると

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z \quad (6.205)$$

更に、運動量ベクトル \mathbf{p} とエネルギー E を

$$\mathbf{p} := \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E := \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.206)$$

と定義すると、

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p'_x = \frac{p_x - \frac{v}{c^2} E}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.207)$$

となる。こうして、 $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ が (ct, x, y, z) と同じ変換をすることがわかる。

6.3.2 ローレンツ群の性質

時空点が座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) で与えられる空間をミンコフスキー空間という。ミンコフスキー空間の内積は (3.15) で与えられ、計量テンソルは (3.17) で与えられる。これを用いると、(6.202) の関係式は次のように書ける。

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu =: \langle x, x \rangle = \text{一定} \quad (6.208)$$

3.1.4 節で述べたように、内積 (6.205) を不変にする変換の全体はローレンツ群 $O(3,1)$ をなす。ミンコフスキー計量における内積を不変にする変換群は (3.19):

$$A^T g A = g \quad (6.209)$$

を満たす正則行列の全体からなる。ミンコフスキー計量における内積は正定値ではなく、その正負によってミンコフスキー空間のベクトルは次のように分類される。

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle > 0 & \text{ 時間的 (time-like)} \\ \langle x, x \rangle < 0 & \text{ 空間的 (space-like)} \\ \langle x, x \rangle = 0 & \text{ 光的 (light-like)} \end{aligned} \quad (6.210)$$

ローレンツ群の元は式 (6.209) を満たす正則行列 A である。(6.209) の行列式をとると

$$(\det A)^2 = 1 \quad (6.211)$$

が得られる。従って、ローレンツ変換は次の2つのタイプの大別できる。

$$\begin{aligned} L_+ & : \{A; A^T g A = g, \det A = 1\} \\ L_- & : \{A; A^T g A = g, \det A = -1\} \end{aligned} \quad (6.212)$$

ここで、 L_+ は特殊ローレンツ群 $SO(3,1)$ である。(6.209) を行列成分で書くと

$$A_{\alpha\mu} g^{\alpha\beta} A_{\beta\nu} = g_{\mu\nu} \quad (6.213)$$

であるが、 $g^{\alpha\beta}$ が対角成分しかゼロでないので

$$A_{0\mu} A_{0\nu} - \sum_{i=1}^3 A_{i\mu} A_{i\nu} = g_{\mu\nu} \quad (6.214)$$

$\mu = \nu = 0$ とおくと、

$$(A_{00})^2 - \sum_{i=1}^3 (A_{i0})^2 = 1 \quad (6.215)$$

これから、 $A_{00} \geq 1$ か $A_{00} \leq -1$ であることが分かる。前者は時間の順序を入れ替えないので順時的ローレンツ変換と呼ばれる。この分類を加えると、ローレンツ変換は次の4種類に分類できる。

$$\begin{aligned} L_+^{(+)} &: \{A; A^T g A = g, \det A = 1, A_{00} \geq 1\} \\ L_-^{(-)} &: \{A; A^T g A = g, \det A = -1, A_{00} \leq -1\} \\ L_-^{(+)} &: \{A; A^T g A = g, \det A = -1, A_{00} \geq 1\} \\ L_+^{(-)} &: \{A; A^T g A = g, \det A = 1, A_{00} \leq -1\} \end{aligned} \quad (6.216)$$

これら4種類のローレンツ変換は、 $SO(3,1)$ の連続変換によって互いに移り変わることはない連結部分になっている。特に、 $L_+^{(+)}$ は単位元を含む $SO(3,1)$ の不変部分群であり、固有ローレンツ群と呼ばれる。

6.3.3 ローレンツ群のリー代数

ローレンツ群のリー代数を構成する行列 M は (6.209) において微小変換 $A = 1 + M$ を考えることにより得られる。すなわち、

$$M^T g + g M = 0 \quad (6.217)$$

この式は行列の16成分に10個の条件を与えるので、独立な成分の数は6個のとある。そこで、(6.217) を満たすものとして次の6個の行列を選ぼう。

$$\begin{aligned} M_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{03} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.218)$$

他の成分は $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ で定義される。ここで、 M_{12}, M_{23}, M_{31} は空間の回転、 M_{01}, M_{02}, M_{03} は時空の回転の生成子である。後者の行列要素の符号が前者と異なるのは、ミンコフスキー計量の符号の違いによる。

(6.217) を満たす任意の行列 M は (6.218) の $M_{\mu\nu}$ を用いて次のように表される。

$$M = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (6.219)$$

$\{M_{12}, M_{23}, M_{31}\}$ は時間成分を無視すると 3次元直交群 $O(3)$ のリー代数となっていることが分かる。従って、 $O(3)$ 群は $O(3,1)$ 群の部分群である。 M_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) は i, j 軸の張る平面内の回転の生成子となっている。

$O(3,1)$ のリー代数 $M_{\mu\nu}$ は次の交換関係を満足する。

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} \quad (6.220)$$

この交換関係を見通しのよいものにするために、次のように時間部分を含む生成子と含まない生成子に分ける。

$$\begin{aligned} M_1 &= -M_{23}, \quad M_2 = -M_{31}, \quad M_3 = -M_{12} \\ N_1 &= M_{01}, \quad N_2 = M_{02}, \quad N_3 = M_{03} \end{aligned} \quad (6.221)$$

これらを用いると、(6.220) は次のように書ける。

$$[M_i, M_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} M_k \quad (6.222)$$

$$[N_i, N_j] = -\sum_k \epsilon_{ijk} M_k \quad (6.223)$$

$$[M_i, N_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} N_k \quad (6.224)$$

(6.223) は直交する方向へ 2 つのローレンツ変換を行うことは空間の回転に等価であることを示している。

ローレンツ群のリー代数 (すなわち、 $O(3,1)$ 群のリー代数) は $SL(2, \mathbb{C})$ のリー代数に等しい。 $SL(2, \mathbb{C})$ は行列式が 1 の 2 行 2 列複素行列全体のなす群である。そのリー代数はトレースがゼロの 2 行 2 列複素行列であるので、独立な成分の数は 6 個である。そのようなリー代数の元はパウリ行列を用いて次のように構成できる。

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{i}{2}\sigma_1, \quad M_2 = -\frac{i}{2}\sigma_2, \quad M_3 = -\frac{i}{2}\sigma_3, \\ N_1 &= -\frac{1}{2}\sigma_1, \quad N_2 = -\frac{1}{2}\sigma_2, \quad N_3 = -\frac{1}{2}\sigma_3. \end{aligned} \quad (6.225)$$

実際、これらは (6.222)-(6.224) の交換関係を満足する。このようにローレンツ群のリー代数と $SL(2, \mathbb{C})$ のリー代数は同型であるからローレンツ群と $SL(2, \mathbb{C})$ の間には準同型対応がある。これを確かめるために、2行2列のエルミート行列 H の全体を考える。 H の独立な行列成分の数は4なので、パウリ行列を用いて次のように表せる。

$$H(x) = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \sigma_\mu = x^0 \sigma^0 - x^1 \sigma^1 - x^2 \sigma^2 - x^3 \sigma^3 \quad (6.226)$$

ここで、 σ^0 は2行2列の単位行列、 $\sigma^\mu = \sum_n g^{\mu\nu} \sigma_\nu$ である。(6.226) によりミンコフスキー空間のベクトル x^μ とエルミート行列 H の間に1対1の関係が成立する。また、

$$\det H = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 := \langle x, x \rangle \quad (6.227)$$

であることに注意しよう。 H の行列式は x の内積を与える。

ここで行列 H を $SL(2, \mathbb{C})$ の変換 a で

$$H' = a H a^\dagger \quad (6.228)$$

のように変換すれば、 H' もまた明らかにエルミートであるので、4次元ベクトル x'^μ をもちいて

$$H' = \sum_{\mu} x'^\mu \sigma_\mu \quad (6.229)$$

と表すことができる。 $\det a = 1$ なので、 $\det H' = \det H$ である。従って、 $\langle x', x' \rangle = \langle x, x \rangle$ となる。従って、 x から x' への変換

$$x'^\mu = \sum_{\nu} A_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (6.230)$$

はローレンツ変換であることが分かる。

ローレンツ変換 A と $SL(2, \mathbb{C})$ の行列 a との関係は

$$A_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho^{\mu} a \sigma_{\nu} a^{\dagger}), \quad \rho^{\mu} = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3) \quad (6.231)$$

で与えられる。実際、 $\text{Tr}(\sigma_{\mu} \rho_{\nu}) = 2g_{\mu\nu}$ であるから (6.229)、(6.230) より

$$\sum_{\mu} g_{\mu\kappa} x'^{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \text{Tr}(\rho_{\kappa} a \sigma_{\nu} a^{\dagger}) x^{\nu} \quad (6.232)$$

であることを示すことができる。これから (6.231) が成立することが分かる。特に、 $\mu = \nu = 0$ とおくと

$$A_{00} = \frac{1}{2} \text{Tr}(a a^{\dagger}) \geq 1 \quad (6.233)$$

が得られる。実際、 $M = aa^\dagger$ とおくと、 M はエルミートで $\det M = 1$ であるので、パウリ行列を用いて

$$\begin{aligned} M &= m_0\sigma_0 + m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + m_3\sigma_3 \\ &= \begin{pmatrix} m_0 + m_3 & m_1 + im_2 \\ m_1 - im_2 & m_0 - m_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.234)$$

となる。 $\det M = 1$ なので

$$m_0^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 = 1 \quad (6.235)$$

であり、それゆえ $\text{Tr}(aa^\dagger) = 2m_0 \geq 2$ であることが分かる。従って、(6.230) のローレンツ変換は順時的である。さらに、(6.231) において $a \rightarrow 1$ なる極限をとると $A_\nu^\mu \rightarrow (1/2)\text{Tr}(\rho^\mu\sigma_\nu) = \delta_\nu^\mu$ となるので、このローレンツ変換は $L_+^{(+)}$ すなわち、固有ローレンツ群に属する。

$\forall a \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ ならば、 $-a \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ なので、あるローレンツ変換 A には $\pm a$ が対応している。従って、 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ から固有ローレンツ群 $L_+^{(+)}$ への対応は $2:1$ の準同型写像である。準同型定理により

$$\text{SL}(2, \mathbb{C})/Z_2 \cong L_+^{(+)} \quad (6.236)$$

$\text{SL}(2, \mathbb{C})$ は固有ローレンツ群の普遍被覆群である。前者の部分群 $\text{SU}(2)$ と後者の部分群 $\text{SO}(3)$ との間にも同様の関係

$$\text{SU}(2)/Z_2 \cong \text{SO}(3) \quad (6.237)$$

が成立する。

$\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の変換 a として特に行列式が1のユニタリ行列をとると、(6.230) は $\text{SO}(3)$ となる。実際、(6.231) において a がユニタリ行列ならば $a^\dagger = a^{-1}$ なので、 $\rho_0 = 1$ となり、 $A_0^0 = 1, A_i^0 = A_0^i = 0$ 。そこで、

$$\sum_{\mu=0}^3 (\sigma_\mu)_{ab} (\sigma_\mu)_{cd} = 2\delta_{ad}\delta_{bc} \quad (6.238)$$

から

$$\sum_{\mu=0}^3 A_\mu^i (A^T)_j^\mu = \delta_j^i \quad (6.239)$$

が成立するので、 A_j^i は直交行列である。 $\det A$ は微小変換 $a = 1 + i \sum_{k=1}^3 \epsilon_k \sigma_k$ について調べれば十分である。この時、

$$A_j^i = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho^i a \sigma_j a^{-1}) = \delta_{ij} + \sigma_k \epsilon_{ijk} \epsilon_k \quad (6.240)$$

となり、 $\det A = 1$ が確かめられる。

6.3.4 ローレンツ群の表現

ローレンツ群のリー代数 (6.225) に一意的に対応する群は普遍被覆群 $SL(2, \mathbb{C})$ である。それゆえ、リー代数の表現は $SL(2, \mathbb{C})$ の表現も与える。まず、リー代数の1次結合

$$J_i = \frac{i}{2}(M_i + iN_i), \quad K_i = \frac{i}{2}(M_i - N_i) \quad (6.241)$$

を用いて (6.225) を書き換えると、

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i \sum_k \epsilon_{ijk} J_k \\ [K_i, K_j] &= i \sum_k \epsilon_{ijk} K_k \\ [J_i, K_j] &= 0 \end{aligned} \quad (6.242)$$

これは $SU(2) \times SU(2)$ の交換関係であり、 $SU(2)$ の表現を利用して $SL(2, \mathbb{C})$ の表現が構成できることが分かる。6.1.1 節で議論したように $SU(2)$ の表現は、 J_i, K_i を生成子として構成されるので、 $SL(2, \mathbb{C})$ の表現は一般に $D(j, k)$ ($j, k = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) と表され、表現の次元は $(2j+1)(2k+1)$ である。 $SL(2, \mathbb{C})$ と固有ローレンツ群 $L_+^{(+)}$ との対応は、 $j+k$ が整数のときは1:1、半整数のときは2:1で2価表現と呼ばれる。従って、固有ローレンツ群の表現は $SL(2, \mathbb{C})$ の表現の中で $j+k$ が整数のものを選び出すことによって得られる。

(6.241) を逆に解くと

$$M_i = -i(J_i + K_i), \quad N_i = K_i - J_i \quad (6.243)$$

なので群の表現がユニタリであるためにはリー代数の表現がエルミートである必要がある。 J_i, K_i はエルミート行列なのでそれらから構成される $SU(2)$ 群はユニタリである。しかし、 M_i は反エルミート、 N_i はエルミートなので $SL(2, \mathbb{C})$ の表現は一般にはユニタリとは限らない。その理由はローレンツ群や $SL(2, \mathbb{C})$ がコンパクト群ではないためである⁴。

$SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現は $D(1/2, 0)$ と $D(0, 1/2)$ である。これらの表現でのリー代数は

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{2}, 0\right) &: M_i = -\frac{i}{2}\sigma_i, \quad N_i = -\frac{1}{2}\sigma_i \\ D\left(0, \frac{1}{2}\right) &: M_i = -\frac{i}{2}\sigma_i, \quad N_i = \frac{1}{2}\sigma_i \end{aligned} \quad (6.244)$$

⁴コンパクト群は定理 23 により常にユニタリ表現が可能である。ローレンツ群は表現を無限次元にまで拡張することによってユニタリ表現を構成することができる。

である。表現 $D(1/2, 0)$ の下で変換する ξ を 2 成分スピノルとよび、表現 $D(0, 1/2)$ の下で変換する η を共役スピノル (conjugate spinor)。 (6.224) から分かるように、 M_i によって生成される空間回転の下では ξ も η も同じ変換をするが、 N_i によって生成される微小ローレンツ変換の下では ξ, η は次のように変換される。

$$\begin{aligned}\xi &\rightarrow \xi' = \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon\sigma_i\right)\xi \\ \eta &\rightarrow \eta' = \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\sigma_i\right)\eta\end{aligned}\quad (6.245)$$

と変換する。従って、 $\xi^\dagger\xi$ はスカラーではない。これは $D(1/2, 0)$ がユニタリ表現ではないからである。これに対して、 $D(0, 1/2)$ のスピノル η を用いた組み合わせ $\xi^\dagger\eta$ はローレンツ不変な量である。それゆえ、ローレンツ変換の下で不変な量を構成する際には、2つの表現 $D(1/2, 0), D(0, 1/2)$ の直和を考えて、4 成分スピノル (ξ, η) を導入することが便利である。

6.3.5 ディラック代数

ミンコフスキー空間に導入されるクリフォード代数をディラック代数と呼ぶ。ローレンツ変換で不変に保たれる 2 次形式を、1 次形式の自乗の形で表現することを考える。

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0\gamma^0 - x^1\gamma^1 - x^2\gamma^2 - x^3\gamma^3)^2 \quad (6.246)$$

この等式を満足するためには、 γ^μ は次の反交換関係を満足すればよいことが分かる。

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (6.247)$$

ローレンツ変換の下では、 γ^μ は x^μ と同じ変換をする。ディラック代数のすべての独立な基底は γ 行列の積 $\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}$ で与えられるので、ディラック代数の次元は $2^4 = 16$ である。従って、 γ 行列は 4 行 4 列であり、その表現空間は 4 成分スピノル (ξ, η) 空間である。反交換関係 (6.247) より、 $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ はすべてのディラック行列と反可換である。そこで

$$\gamma^5 = -\gamma_5 := -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (6.248)$$

を定義する。この時、16 個の独立な γ 行列は次のように分類できる ($1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$)。

$$1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\mu, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (6.249)$$

γ 行列の表示として

$$\gamma^0 = -i\sigma_0 \otimes \sigma_1, \quad \gamma^i = \sigma_i \otimes \sigma_2 \quad (6.250)$$

とすると

$$\gamma^5 = \sigma_0 \otimes \sigma_3 \quad (6.251)$$

は対角的になる。従って、

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \quad (6.252)$$

は $D(1/2, 0) \oplus D(0, 1/2)$ から $D(1/2, 0)$ あるいは $D(0, 1/2)$ をとりだす射影演算子であることが分かる。すなわち、

$$P_+ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_- \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \quad (6.253)$$

4成分スピノル空間でのリー代数の表現は次式によって与えられる。

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (6.254)$$

実際この式が (6.220) を満足することは直接代入することによって確かめることができる。あるいは、(6.250) を用いると

$$\begin{aligned} M^{ij} &= \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{2} \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k \otimes \sigma_0 \\ M^{0i} &= \frac{1}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{1}{2} \sigma_i \otimes \sigma_3 \end{aligned} \quad (6.255)$$

となるので、上付き添え字を下付き添え字に変換して (6.221) を使えば、(6.244) に一致することが示せる。

4成分スピノル

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger = (\xi^\dagger, \eta^\dagger) \quad (6.256)$$

から $SL(2, \mathbb{C})$ 不変な量を作るためには、前述のように $\xi^\dagger \eta$ という組み合わせを作る必要がある。このために

$$\gamma^4 := i\gamma^0 = \sigma_0 \otimes \sigma_1 \quad (6.257)$$

という量を導入して

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^4 \quad (6.258)$$

を導入すると、 $\bar{\psi}\psi$ は $SL(2, \mathbb{C})$ に対して不変である。これを示そう。

$SL(2, \mathbb{C})$ の変換は

$$S = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right) \quad (6.259)$$

で与えられる。この下で 4 成分スピノルは次のように変換される。

$$\psi'^a = \sum_{b=1}^4 S_b^a \psi^b \quad (6.260)$$

ここで、 γ 行列として表示 (6.250) をとると

$$(\gamma^i)^\dagger = \gamma^i, \quad (\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0 \quad (6.261)$$

なので

$$(M^{ij})^\dagger = -M^{ij}, \quad (M^{0i})^\dagger = M^{0i} \quad (6.262)$$

となるので、 S はユニタリではない ($S^\dagger \neq S^{-1}$)。しかし、

$$S^\dagger \gamma^4 = \gamma^4 S^{-1} \quad (6.263)$$

なので

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^4 S \psi = \psi^\dagger \gamma^4 S^{-1} S \psi = \bar{\psi}\psi \quad (6.264)$$

が言える。

2 つの 4 成分スピノルの直積は次のように既約表現の直和に分解できる。

$$\begin{aligned} & \left[D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right) \right] \otimes \left[D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= D(0, 0) \oplus D(0, 0) \oplus D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ & \quad \oplus D(1, 0) \oplus D(0, 1) \end{aligned} \quad (6.265)$$

これに対応して、 $SL(2, \mathbb{C})$ のもとで決まった変換性を持つ組み合わせは次の 5 通りであることが分かる。

$$\begin{aligned} D(0, 0) : & \quad S = \bar{\psi}\psi \text{ (スカラー)} \\ D(0, 0) : & \quad P = \bar{\psi}\gamma^5\psi \text{ (擬スカラー)} \\ D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) : & \quad V = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \text{ (ベクトル)} \\ D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) : & \quad A = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \text{ (軸性ベクトル)} \\ D(1, 0) \oplus D(0, 1) : & \quad T = \bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi \text{ (反対称テンソル)} \end{aligned} \quad (6.266)$$

実際、 $SL(2, \mathbb{C})$ の変換に対して γ 行列は

$$\gamma'^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1} = \sum_{\nu} A_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu} \quad (6.267)$$

のように変換するので、たとえば V は

$$\bar{\psi}'\gamma'^{\mu}\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^{\mu}S\psi = \sum_{\nu} (A^{-1})_{\nu}^{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi \quad (6.268)$$

のようにベクトルとして変換することが分かる。次に、 $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ が擬スカラーであることは

$$S\gamma^5S^{-1} = -(\det A)\gamma^5 \quad (6.269)$$

からわかる。実際、

$$\begin{aligned} S\gamma^5S^{-1} &= -iS\gamma^0S^{-1}S\gamma^1\cdots S\gamma^3S^{-1} \\ &= -i\sum A_{\nu_0}^0A_{\nu_1}^1A_{\nu_2}^2A_{\nu_3}^3\gamma^{\nu_0}\gamma^{\nu_1}\gamma^{\nu_2}\gamma^{\nu_3} \\ &= -i\sum \epsilon\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{array}\right)A_{\nu_0}^0A_{\nu_1}^1A_{\nu_2}^2A_{\nu_3}^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &= -(\det A)\gamma^5 \end{aligned} \quad (6.270)$$

6.3.6 ポアンカレ群

ローレンツ変換に空間の並進操作を組み合わせた変換は群をなす。これを非斉次ローレンツ群あるいはポアンカレ群 (Poincaré group) という。ポアンカレ群はミンコフスキー空間の任意の 2 点間の距離を不変にする実 1 次変換全体の作る群である。ポアンカレ群 P の元 (a, A) に対応する変換は

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} A_{\nu}^{\mu}x^{\nu} + a^{\mu} \quad (6.271)$$

である。群の単位元は $(0, 1)$ 、逆元は

$$(a, A)^{-1} = (-A^{-1}a, A^{-1}) \quad (6.272)$$

で与えられる。積は次のように定義される。

$$(a_2, A_2)(a_1, A_1) = (A_2a_1 + a_2, A_2A_1) \quad (6.273)$$

ローレンツ群 L は変換 $(0, A)$ よりなるポアンカレ群の部分群、空間の並進群 T は変換 $(a, 1)$ よりなるポアンカレ群の不変部分群である。後者は $\forall (a, A) \in P$ に対して

$$(a, A)(b, 1)(a, A)^{-1} = (Ab, 1) \quad (6.274)$$

が成立することからわかる。

並進群 T が不変部分群であることから、剰余類群 P/T がローレンツ群に同型であることが分かる。

$$P/T \cong L \quad (6.275)$$

並進群の生成元は 4 元運動量演算子

$$P_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (6.276)$$

であり、そのユニタリ表現は

$$U(a) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_\mu a^\mu P_\mu\right) \quad (6.277)$$

で与えられる。リー代数は可換

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (6.278)$$

なので、並進群はアーベル群である。

ローレンツ群のリー代数を微分演算子で表現すると

$$M_{\mu\nu} = x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu \quad (6.279)$$

と書ける。これはローレンツ群のリー代数が満たすべき関係式 (6.220) を満足することが分かる。特に、 $M_{\mu\nu}$ の空間成分は空間回転の生成子である角運動量演算子

$$M_{23} = \frac{i}{\hbar} L_x, \quad M_{31} = \frac{i}{\hbar} L_y, \quad M_{12} = \frac{i}{\hbar} L_z \quad (6.280)$$

を与える。また、

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu \quad (6.281)$$

このようにして、ポアンカレ群のリー代数は $\{M_{\mu\nu}, P_\mu\}$ で与えられる。

ポアンカレ群の表現はカシミア演算子の固有値によって分類される。カシミア演算子とはリー代数のすべての生成元と可換な演算子である。その一つは

$$P^2 = \sum_{\mu=0}^3 P^\mu P_\mu \quad (6.282)$$

P^2 の固有値 p^2 によって、ポアンカレ群の既約表現は次の 4 種類に分類できる。

- クラス I: $p_\mu = 0$ $G_p = L_+^{(+)}$
- クラス II: $p^2 > 0$ (時間的) $G_p = \text{SO}(3)$
- クラス III: $p^2 = 0$ (光的) $G_p = E_2$
- クラス IV: $p^2 < 0$ (空間的) $G_p = \text{SO}(2,1)$

クラス I では $p_\mu = 0$ であるから並進群に関しては恒等表現になっており、ポアンカレ群は固有ローレンツ変換に帰着する。 $p_\mu \neq 0$ の場合を考えるためにもう一つのカシミア演算子を導入する。まず、

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \sum_{\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} \quad (6.283)$$

は P_ν と可換であり、

$$W^2 := \sum_{\mu=0}^3 W^\mu W_\mu \quad (6.284)$$

はすべての生成元と可換なカシミア演算子である。ここで、 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は4次元の完全反対称テンソルである。 W_μ は P_ν と可換なので、 W_μ は P_ν の固有値 p_ν を不変に保つ変換の生成元であり、小群のリー代数となっている。 W^μ は次の交換関係を満足する。

$$\begin{aligned} [W_\mu, W_\nu] &= -\sum_{\rho,\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho W^\sigma, [W_\mu, P_\mu] = 0, \\ [W_\mu, M_{\rho\sigma}] &= g_{\mu\sigma} W_\rho - g_{\mu\rho} W_\sigma \end{aligned} \quad (6.285)$$

クラス II ではミンコフスキー空間の座標を適当に選ぶことによって $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ とできるので、この時 (6.283) より

$$W_0 = 0, W_1 = mM^{23}, W_2 = mM^{31}, W_3 = mM^{12} \quad (6.286)$$

が得られる。 W_i/m ($i = 1, 2, 3$) は $\text{SO}(3)$ のリー代数を与えるので、クラス II の小群は $\text{SO}(3)$ である。また、 W^2 の固有値は $W^2 = -m^2 j(j+1)$ ($j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) となり、クラス II の既約表現は (j, m) で指定される。

クラス III では $p^\mu = (m, 0, 0, m)$ として一般性を失わない。この場合、(6.283) より

$$W_0 = -W_3 = -mM^{12}, W_1 = m(M^{23} - M^{20}), W_2 = m(M^{13} - M^{06}) \quad (6.287)$$

が得られる。 $W_i/m = S_i$ ($i = 1, 2, 3$) と定義すると、これらは次の交換関係に従う。

$$[S_1, S_2] = 0, [S_2, S_3] = -S_1, [S_3, S_1] = -S_2 \quad (6.288)$$

これらの交換関係を満足する微分演算子による表示は

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial x}, S_2 = \frac{\partial}{\partial y}, S_3 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (6.289)$$

これは $x - y$ 平面内の平行移動と回転の生成元である。従って、(6.287) は 2次元面内の平行移動と回転の作る群 E_2 のリー代数であることがわかる。こうしてクラス III の小群は E_2 であることが分かった。

クラス IV の場合は、 $p^\mu = (0, 0, 0, m)$ と選ぶことができるので、(6.283) より

$$W_0 = -mM^{12}, W_1 = -mM^{20}, W_2 = -mM^{01}, W_3 = 0 \quad (6.290)$$

となるので、 W_i/m ($i = 0, 1, 2$) は $SO(2,1)$ のリー代数である。したがって、クラス IV の小群は $SO(2,1)$ である。

第II部

微分形式とその応用

多様体上での積分を考えると、その被積分関数に相当するものが微分形式である。多様体の次元が n の時は n 次微分形式がそれに相当する。微分形式はまた、多様体の曲りの度合いや位相幾何学的性質を調べる de Rham コホモロジーの基礎となる重要なものである。

物理学における、微分形式の応用範囲は広い。力学、熱力学、電磁気学、一般相対論を含む物理のあらゆる分野で使われる。その理由は、微分形式が座標系のとり方に依らない微分可能多様体の普遍的な記述を可能にするからである。微分可能多様体を物理系と思えば、物理法則が座標系の取り方に依らないという特殊および一般相対性原理やゲージ原理の思想にぴったりと合致した数学形式であることが納得できよう。数学的な観点から言えば、そのような一般的記述は de Rham コホモロジー群、微分幾何学、ファイバー束、特性類などによって可能になるのであるが、これらは「物理数学 III」の範疇を超えるのでここでは述べない。ここでは、微分形式の使い方になれるという観点から必要最小限の記述と、そのマクスウェル理論への応用について述べる。

第7章 微分形式とは

7.1 接空間と余接空間

4.3節で学んだように n 次元多様体 M の点 $p \in M$ の座標 (x^1, x^2, \dots, x^n) に対して、共変ベクトル (covariant vector) ¹

$$e_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad (7.1)$$

で張られる空間を接空間 (tangent space) といい、 $T_p(M)$ と書く。基底ベクトル $\{e_i\}$ を用いて任意のベクトルが $\mathbf{a} = a^i e_i$ と展開できるのと同様に、接空間のベクトル $X \in T_p(M)$ は

$$X = X^\mu e_\mu \quad (7.2)$$

と展開できる。ここで、繰り返し現れる添え字については $\mu = 1, 2, \dots, n$ について和をとるものと約束する。 X^μ は接ベクトル X の成分である。

線形ベクトル空間に内積を導入することで、距離や面積が定義できる。簡単な例として、上記のベクトル $\mathbf{a} = a^i e_i$ ともう一つのベクトル $\mathbf{b} = b^j e_j$ の内積は、

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := a^i b^j \langle e_i, e_j \rangle \quad (7.3)$$

と定義される。ここで、 $\langle e_i, e_j \rangle = e_i^T \cdot e_j$ である (T は転置)。基底 $\{e_i\}$ で張られるベクトル空間に対して、基底 $\{e_i^T\}$ で張られるベクトル空間を双対ベクトル空間 (dual vector space) という。特に、正規直交基底をとると

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (7.4)$$

となる。

これと同様に、接空間と双対な空間を余接空間 (cotangent space) といい、記号 $T_p^*(M)$ で表す。接空間の基底が共変ベクトルであったので、余

¹ベクトル空間で基底のスケール (単位) を変換したとき、それと同じようにふるまうベクトルを共変ベクトル、逆数のようにふるまうベクトルを反変ベクトルという。たとえば、長さの場合に、基底の単位を 1m から 1cm に 1/100 に変更すると、座標の値は 100 倍になるので反変ベクトル、勾配 $\partial/\partial x$ の値は 1/100 になるので共変ベクトルである。

接空間の基底は反変ベクトル (contravariant vector) (dx^1, \dots, dx^n) である。そこで、

$$e^\mu := dx^\mu \quad (7.5)$$

とおくと、余接空間のベクトル $\omega \in T_p^*(M)$ は

$$\omega = \omega_\mu e^\mu \quad (7.6)$$

と展開できる。 $\{e^\mu\}$ は $\{e_\mu\}$ の双対基底 (dual basis) と呼ばれ、(7.4) と同様の正規直交条件

$$\langle e^\mu, e_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \quad (7.7)$$

を満たすものと仮定される。この時、 X と ω の内積は

$$\langle \omega, X \rangle = \omega_\mu X^\mu \quad (7.8)$$

で与えられる。

7.2 r -形式

微分可能多様体上で定義される完全反対称な共変テンソル場を微分形式 (differential form) という。 r 次微分形式は r -形式 (r -form) とも呼ばれる。

7.2.1 0-形式

0-形式 (0-form) はスカラー関数 f である。

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) \quad (7.9)$$

7.2.2 1-形式

1-形式 (1-form) は1階の反変ベクトルである。

$$\omega := \omega_\mu dx^\mu \quad (7.10)$$

ここで、これまでと同様に2度繰り返される文字については $\mu = 1, 2, \dots, n$ について和をとるものとする (n はベクトル空間の次元)。

7.2.3 2-形式

より高次の微分形式を定義するために外積 (exterior product)² を定義しよう。簡単のため変数の数が2個 (2次元) の場合を考える。まず、2-形式 (2-form) の基底は

$$dx^1 \wedge dx^2 := dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1 = -dx^2 \wedge dx^1 \quad (7.11)$$

である。ここでテンソル積の記号 \otimes は積が順序づけられていることを明示するために用いている (すなわち、 $A \otimes B$ と $B \otimes A$ は別と考える)。これから $dx^1 \wedge dx^1 = dx^2 \wedge dx^2 = 0$ であることがわかる。また、2つの1-形式 $dx = x_1 dx^1 + x_2 dx^2$ と $dy = y_1 dx^1 + y_2 dx^2$ から構成される2-形式は

$$dx \wedge dy = (x_1 y_2 - x_2 y_1) dx^1 \wedge dx^2 \quad (7.12)$$

で与えられる。これはベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$ と $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$ の外積が

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1) = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (7.13)$$

で与えられることに類似している。特に、 (dx^1, dx^2) から (dx, dy) への変換が行列式が1の直交変換の時は $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$ なので (7.12) は $dx \wedge dy = dx^1 \wedge dx^2$ となる、すなわち、2-形式は直交変換に対して不変である。また、(7.11) のように順序を入れ替えると符号が変わることは外積による積分が向きづけられた多様体上の積分であることを示している。特に、(局所的な) 直交座標系で向き (符号) が決まっている場合は $dx \wedge dy$ は単に $dx dy$ とおいても差し支えない。

一般の2-形式は

$$\omega = \frac{1}{2!} \omega_{\mu_1 \mu_2} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \quad (7.14)$$

で与えられる。右辺に現れる外積は ${}_n C_2$ 通りあることがわかる。

7.2.4 3-形式

同様に、3-形式の基底は3個の変数を添字に関して完全反対称にすることによって得られる。特に、変数の数が3個の場合は、

$$\begin{aligned} & dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & := dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3 + dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^1 + dx^3 \otimes dx^1 \otimes dx^2 \\ & \quad - dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^2 \otimes dx^1 \\ & = dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 = dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ & = -dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \end{aligned} \quad (7.15)$$

²ウエッジ積 (wedge product) と呼ばれる

が成立する。各項の符号は番号の順序が1,2,3の偶置換の場合はプラス、奇置換の場合はマイナスであると定義される。

7.2.5 r -形式

一般に、 r -形式の基底は次のように展開できる。

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^r = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) dx^{\sigma(1)} \otimes dx^{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes dx^{\sigma(r)} \quad (7.16)$$

ここで、 σ は r 次の対称群 S_r の要素であり、 $\text{sgn}(\sigma)$ はそれが偶置換か奇置換かによって $+1$ または -1 の値をとる符号関数である。

一般に r -形式は次のように与えられることが分かる。

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \quad (7.17)$$

ここで、係数 $\omega_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r}$ は添字に関して完全反対称である。また、空間の次元が n の時、完全反対称性より $r \leq n$ でなければならないことがわかる ($r > n$ なる項は消える)。

n 次元空間のある一つの座標系 (x^1, \cdots, x^n) から別の座標系 (y^1, \cdots, y^n) へ線形変換

$$y^i = A_{ij} x^j \quad (7.18)$$

したときに、 n -形式がどのように変換されるかをみよう。新しい座標系での n -形式は

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = A_{1j_1} \cdots A_{nj_n} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n} \quad (7.19)$$

と書ける。ここで、 j_1, \cdots, j_n は $1, \cdots, n$ を置換したものであるから、そのような置換を σ と書くと

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \sum_{\sigma \in S_n} A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)} \quad (7.20)$$

となる。他方、外積の完全反対称性より

$$dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)} = \text{sgn}(\sigma) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (7.21)$$

である。よって

$$\begin{aligned} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= (\det A) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned} \quad (7.22)$$

が得られる。これは n -形式を記述する変数変換の係数がヤコビアンで与えられることに対応している。また、変換が行列式が1の直交変換 ($\det A=1$) である時、 n 形式は不変であることがわかる。

r -形式の ξ と s -形式の ω の外積の順序を入れ替えたときの符号の変化は

$$\xi \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \xi \quad (7.23)$$

で与えられることは容易に確かめられる。

7.3 外微分

一般に r -形式 (7.17) に対して、基底の取り方によらない外微分 (exterior derivative) と呼ばれる作用 d が次のように定義される³。

$$d\omega = \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (7.24)$$

特に、 r が多様体の次元 n に等しい場合は $dx^\alpha, dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_r}$ の中の少なくとも2つは同じでなければならないので

$$d\omega = 0 \quad (r = n) \quad (7.25)$$

であることが分かる。

(7.24) の外微分を再びとると

$$d^2\omega = \frac{1}{r!} (\partial_\beta \partial_\alpha \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (7.26)$$

となる。ここで、 $\partial_\alpha := \partial / \partial x^\alpha$ である。右辺で $\partial_\alpha \partial_\beta$ は α と β の交換に対して対称であるが、 $dx^\alpha \wedge dx^\beta$ は反対称なので

$$d^2\omega = 0 \quad (7.27)$$

が得られる。

r -形式の ω と s -形式の ξ の2つの微分形式の外積の外微分については次のライプニッツ則 (Leibnitz rule) が成立する。

$$d(\omega \wedge \xi) = d\omega \wedge \xi + (-1)^r \omega \wedge d\xi \quad (7.28)$$

³ r -形式に対する外微分ということを示すために d は d_r と書かれることもある。この場合は、 $d\omega$ は $d_r\omega$ と書かれる。

第8章 ベクトル解析の諸公式の導出

この章では3次元空間を考える。

8.1 (擬)スカラー、ベクトル、軸性ベクトル

3次元空間では r -形式は $r = 0, 1, 2, 3$ の場合までが存在するが、これらはそれぞれベクトル解析で現れる基本量に対応している。まず、0-形式

$$\omega_0 = f(x, y, z) \quad (8.1)$$

はスカラー場 f を表している。ここで、スカラーとは座標の回転と反転に対して値を変えない量をいい、場とは f が場所 (座標) の関数であることを意味している。座標の回転に対しては値を変えないが、反転に対して符号を変える量を擬スカラーという。1-形式

$$\omega_1 = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz \quad (8.2)$$

はベクトル場

$$\mathbf{a} := (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad (8.3)$$

に対応している。2-形式

$$\omega_2 = \omega_{yz} dy \wedge dz + \omega_{zx} dz \wedge dx + \omega_{xy} dx \wedge dy \quad (8.4)$$

は2階の反対称テンソル場

$$\mathbf{b} := (\omega_{yz}, \omega_{zx}, \omega_{xy}), \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (i, j = x, y, z) \quad (8.5)$$

に対応している。これは軸性ベクトル (axial vector)

$$\alpha^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \omega_{\nu\lambda} \quad (8.6)$$

と関係している。ここで軸性という言葉は、座標の反転に対して符号を変えないことを意味している (通常のベクトルは符号を変える)。仮定により2-形式 ω_2 そのものは座標の反転に対して不変である。 $dy \wedge dz$ なども

符号を変えないので b も符号を変えない軸性ベクトルでなければならない。他方、 a などのように符号を変えるものを極性ベクトルという。同様に 3-形式

$$\omega_3 = \omega_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz \quad (8.7)$$

も座標の反転に対して不変である。ところが、 $dx \wedge dy \wedge dz$ は符号を変えるので、 ω_{xyz} は座標の反転に対して符号を変える擬スカラー場である。

これらの量の外微分をとることによってベクトル解析の諸公式が導かれる。

8.2 grad, rot, div

微分演算子 $\text{grad} (\nabla)$, $\text{rot} (\nabla \times)$, $\text{div} (\nabla \cdot)$ はそれぞれ 0-形式、1-形式、2-形式の外微分として現れる。

8.2.1 grad

まず、0-形式 (8.1) の外微分をとると

$$df = (\partial_x f) dx + (\partial_y f) dy + (\partial_z f) dz \quad (8.8)$$

となりベクトル場

$$\text{grad} f := (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \quad (8.9)$$

が得られる。ここで、 $\partial_x = \partial/\partial x$ などである。

特に、 c を定数とすると、 $f(x, y, z) = c$ は 2次元曲面を表している。これに対して外微分を考えると

$$df = (\partial_x f) dx + (\partial_y f) dy + (\partial_z f) dz = \text{grad} f \cdot (dx, dy, dz) = 0$$

なので $\text{grad} f$ は (dx, dy, dz) に垂直である。ところが、後者は曲面上の任意の線素であるので $\text{grad} f$ は曲面に垂直なベクトル場であることがわかる。このことは n 次元空間に対しても当てはまる。すなわち、 $f = c$ は n 次元空間における $n-1$ 次元曲面を表し、曲面上の各点 p ごとに $\text{grad} f$ 方向に垂直な $n-1$ 次元平面が考えられる。これは点 p において曲面に接する平面であり、接平面 (接空間) とよばれ記号 T_p で表される。

(8.8)の外微分をとると(7.27)より

$$\begin{aligned}
 d^2 f &= [\partial_y(\partial_x f)dy + \partial_z(\partial_x f)dz] \wedge dx + [\partial_x(\partial_y f)dx + \partial_z(\partial_y f)dz] \wedge dy \\
 &\quad + [\partial_x(\partial_z f)dx + \partial_y(\partial_z f)dy] \wedge dz \\
 &= [\partial_y(\partial_z f) - \partial_z(\partial_y f)]dy \wedge dz + [\partial_z(\partial_x f) - \partial_x(\partial_z f)]dz \wedge dx \\
 &\quad + [\partial_x(\partial_y f) - \partial_y(\partial_x f)]dx \wedge dy \\
 &= (\text{rot grad } f)_x dy \wedge dz + (\text{rot grad } f)_y dz \wedge dx + (\text{rot grad } f)_z dx \wedge dy \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

これから次のベクトル解析の公式が得られる。

$$\text{rot grad } f = 0 \tag{8.11}$$

スカラー場の外微分は1-形式の grad を与え、1-形式の外微分は2-形式の rot を与える(次節8.2.2を参照)。(8.11)はスカラー場に対する $dd = 0$ の作用の帰結であると解釈できる((7.27) 参照)。

8.2.2 rot

次に、1-形式(8.2)の外微分をとると

$$\begin{aligned}
 d\omega_1 &= (dy\partial_y + dz\partial_z)\omega_x \wedge dx + (dx\partial_x + dz\partial_z)\omega_y \wedge dy \\
 &\quad + (dx\partial_x + dy\partial_y)\omega_z \wedge dz \\
 &= (\partial_y\omega_z - \partial_z\omega_y)dy \wedge dz + (\partial_x\omega_y - \partial_y\omega_x)dz \wedge dx \\
 &\quad + (\partial_x\omega_y - \partial_y\omega_x)dx \wedge dy \\
 &= (\text{rot } \mathbf{a})_x dy \wedge dz + (\text{rot } \mathbf{a})_y dz \wedge dx + (\text{rot } \mathbf{a})_z dx \wedge dy
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

ベクトル場の外微分が回転(rot)で与えられることが分かる。この外微分をとると

$$\begin{aligned}
 d^2\omega_1 &= [\partial_x(\text{rot } \mathbf{a})_x + \partial_y(\text{rot } \mathbf{a})_y + \partial_z(\text{rot } \mathbf{a})_z]dx \wedge dy \wedge dz \\
 &= (\text{div rot } \mathbf{a})dx \wedge dy \wedge dz
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

となるが、(7.27)より $dd = 0$ なので

$$\text{div rot } \mathbf{a} = 0 \tag{8.14}$$

であることが分かる。(8.14)は直接計算することで確かめることができるが、1-形式に $dd = 0$ を作用させた結果とみなすことができる。

8.2.3 div

発散 (divergence) は、2-形式 (8.4) の外微分から得られる。

$$\begin{aligned} d\omega_2 &= (\partial_x\omega_{yz} + \partial_y\omega_{zx} + \partial_z\omega_{xy})dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (\operatorname{div} \mathbf{b})dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (8.15)$$

が得られる。3次元空間の場合は、 $d^2\omega_2 = 0$ は自明な関係式なので ($r > n = 3$ なる外微分形式は恒等的にゼロであることに注意) これから新たな関係式は得られない。

8.2.4 その他の公式

スカラー関数 f と 1-形式 ω_1 の積の外微分はライプニッツ則 (7.28) で $r = 0$ の場合に相当することに注意すると、

$$d(f\omega_1) = df \wedge \omega_1 + f d\omega_1 \quad (8.16)$$

1-形式の外微分が回転に対応すること (8.12) を思い出すと、これから次の公式が得られる¹。

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{a} + f \operatorname{rot} \mathbf{a} \quad (8.17)$$

スカラー関数 f と 2-形式 ω_2 の積の外微分を考えると

$$d(f\omega_2) = df \wedge \omega_2 + f d\omega_2 \quad (8.18)$$

2-形式の外微分が発散に対応することを思い出すと、次の公式が得られる。

$$\operatorname{div}(f\mathbf{b}) = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{b} + f \operatorname{div} \mathbf{b} \quad (8.19)$$

2つの 1-形式 ξ, η の外積の外微分はライプニッツ則 (7.28) で $r = 1$ の場合に相当することに注意すると、

$$d(\xi \wedge \eta) = d\xi \wedge \eta - \xi \wedge d\eta \quad (8.20)$$

これから次の公式が得られる。

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} \quad (8.21)$$

¹1-形式 df と 1-形式 ω_1 のウエッジ積 $df \wedge \omega_1$ が対応するベクトルの外積になることは、直接計算することによっても確かめることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} df \wedge \omega_1 &= (\partial_i f)\omega_j dx^i \wedge dx^j = (\partial_y f \omega_z - \partial_z f \omega_y)dy \wedge dz + \cdots \\ &= (\operatorname{grad} f \times \mathbf{a})_x dy \wedge dz + \cdots \end{aligned}$$

以上をまとめると、 p -形式 ξ と q -形式 η に関するライプニッツ則

$$d(\xi \wedge \eta) = d\xi \wedge \eta + (-1)^p \xi \wedge d\eta \quad (8.22)$$

で、 p, q に具体的な整数を代入することで次の諸公式が得られる。

$$p = 0, q = 0 \quad \text{grad}(fg) = (\text{grad } f)g + f \text{grad } g \quad (8.23)$$

$$p = 0, q = 1 \quad \text{rot}(f\mathbf{a}) = \text{grad } f \times \mathbf{a} + f \text{rot } \mathbf{a} \quad (8.24)$$

$$p = 0, q = 2 \quad \text{div}(f\mathbf{a}) = \text{grad } f \cdot \mathbf{a} + f \text{div } \mathbf{a} \quad (8.25)$$

$$p = 1, q = 1 \quad \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b} \quad (8.26)$$

第9章 多様体上の積分

多様体上の積分は、向き付けられた曲線や曲面をパラメータで表現し、そのパラメータに関して積分することによって実行される。

9.1 線積分

3次元多様体上の曲線 C は、実数パラメータ t を用いて

$$C : (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [t_1, t_2] \quad (9.1)$$

と表すことができる (図 9.1 参照)。1-形式

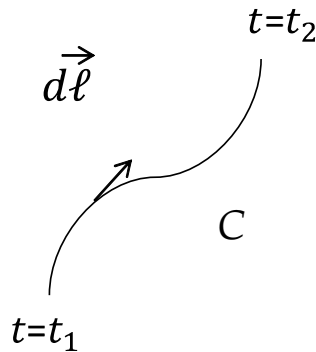


図 9.1: 線積分。

$$\omega_1 = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz \quad (9.2)$$

を曲線 C に沿って積分すると

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_C (\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\omega_x \dot{x} + \omega_y \dot{y} + \omega_z \dot{z}) dt \end{aligned} \quad (9.3)$$

ここで、 $\dot{x} := dx/dt$ などである。

$$\vec{\omega}_1 := (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad (9.4)$$

$$d\vec{\ell} := (\dot{x}dt, \dot{y}dt, \dot{z}dt) \quad (9.5)$$

を用いると (9.3) は

$$\int_C \omega = \int_0^L \vec{\omega}_1 d\vec{\ell} \quad (9.6)$$

と書ける。ここで、 L は曲線の長さである。(9.6) の右辺は、ベクトル場 $\vec{\omega}_1$ を向きづけられた線要素 $\vec{\ell}$ について積分された量であり、積分値は座標系のとり方によらない。この例のように、一般に多様体上の微分形式の積分の値はパラメータや座標系のとり方に依らない。

9.2 面積分

3次元多様体上の2次元曲面は2個の実数パラメータ u, v を用いて

$$S : (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad u \in [u_1, u_2], \quad v \in [v_1, v_2] \quad (9.7)$$

のように記述することができる。この面上での2-形式の積分を考えよう。

$$\iint_S \omega_2 = \iint_S (\omega_{yz} dy \wedge dz + \omega_{zx} dz \wedge dx + \omega_{xy} dx \wedge dy) \quad (9.8)$$

ここで

$$\begin{aligned} dy \wedge dz &= (\partial_u y du + \partial_v y dv) \wedge (\partial_u z du + \partial_v z dv) \\ &= (\partial_u y \partial_v z - \partial_v y \partial_u z) du \wedge dv \\ &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du \wedge dv \end{aligned} \quad (9.9)$$

同様にして

$$dz \wedge dx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du \wedge dv, \quad dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv \quad (9.10)$$

が得られる。これらを (9.8) へ代入して

$$\vec{\omega}_2 := (\omega_{yz}, \omega_{zx}, \omega_{xy}) \quad (9.11)$$

$$d\vec{S} := \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du \wedge dv \quad (9.12)$$

とおくと

$$\iint_S \omega_2 = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \vec{\omega}_2 \cdot d\vec{S} \quad (9.13)$$

が得られる。 u と v を入れ替えるなどして \vec{S} の向きを変えると、積分の値は -1 倍される。

9.3 ストークスの定理

1-形式と2-形式を結び付ける積分公式が次のストークスの定理 (Stokes' theorem) である。

Theorem 26 (ストークスの定理) 空間内の開集合 D 上で定義された C^1 級の1-形式 ω_1 と D に含まれる C^2 級の曲面 S に対して

$$\int_{\partial S} \omega_1 = \iint_S d\omega_1 \quad (9.14)$$

が成立する。ここで、 ∂S は S の境界である¹。証明の概略は次の通りである。まず、図 9.2 のように空間を微小な正方形に分けて、各正方形について (9.14) が成立することを証明せよ。その結果をすべての微小な正方形に関して和をとると、辺を共有する隣り合った正方形ごとに線積分が相殺して (線積分の向きが逆だから)、全体の境界 ∂S の寄与だけが残り (9.14) が得られる。

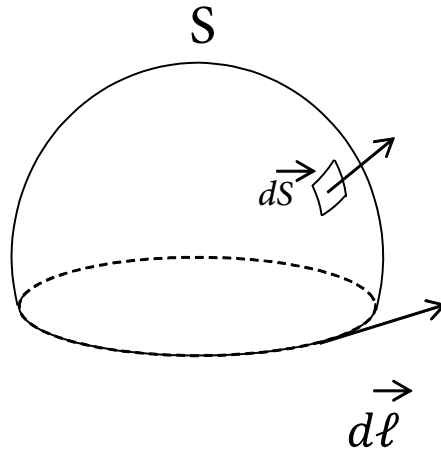


図 9.2: ストークスの定理。

(9.14) をベクトル $\vec{\omega}_1 := (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ を使って書くと、1-形式の外微分が回転であることを思い出すとよく知られたベクトル解析におけるストークスの公式

$$\int_{\partial S} \vec{\omega}_1 d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{\omega}_1 d\vec{S} \quad (9.15)$$

¹ ∂S の向きは次のようにして決定される：境界において、 S の外向きの法線ベクトル $d\vec{S}$ 、境界から S の外部に向かう接ベクトル \vec{n} 、 ∂S の向き $d\vec{\ell}$ が右手系をなす。

が得られる。特に、 S が xy 平面である場合は $\omega_1 = \omega_x dx + \omega_y dy$ とおくと、次のグリーンの定理が得られる。

$$\int_{\partial S} (\omega_x dx + \omega_y dy) = \iint_S \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (9.16)$$

特に、 $\omega_x = -y, \omega_y = x$ と選ぶと、(9.16) の右辺は S の面積 $A(S)$ の2倍になる。よって次の公式を得る。

$$A(S) = \frac{1}{2} \int_{\partial S} (x dy - y dx) \quad (9.17)$$

9.4 ガウスの定理

2-形式と3-形式を結び付ける積分定理が次のガウスの定理 (Gauss's theorem) である。

Theorem 27 (ガウスの定理) 空間内の開集合 D 上で定義された C^2 級の2-形式 ω_2 と D に含まれる C^3 級の体積 V に対して

$$\iint_{\partial V} \omega_2 = \iiint_V d\omega_2 \quad (9.18)$$

が成立する。ここで、 ∂V は V の表面であり、向きは V の外側である。

(9.18) をベクトル $\vec{\omega}_2 := (\omega_{yz}, \omega_{zx}, \omega_{xy})$ を使って書くと、2-形式の外微分が発散であることを思い出すとよく知られたベクトル解析におけるガウスの公式

$$\iint_{\partial V} \vec{\omega}_2 \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\omega}_2 dV \quad (9.19)$$

が得られる。特に、 $\omega_2 = (x, y, z) =: \vec{r}$ と置くと右辺は体積 V の3倍になるので次の公式を得る。

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S} \quad (9.20)$$

任意の2つの関数 f, g に対して成立する関係式

$$f \Delta g - g \Delta f = \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \quad (9.21)$$

にガウスの定理を適用すると

$$\begin{aligned} \iiint_V (f \Delta g - g \Delta f) dV &= \iint_{\partial V} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{\partial V} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (9.22)$$

が得られる。ここで、 $\partial g / \partial n$ は面積要素 dS の法線方向の微分を表している。

第10章 閉形式と完全形式

10.1 ポアンカレの補題

ある微分形式 ω が $d\omega = 0$ を満足する時、 ω は閉形式 (closed form) と呼ばれる。他方、 $\omega = d\alpha$ を満たす 1 値の微分形式 α が存在する時¹、 ω は完全形式 (exact form) あるいは完全微分 (exact differential) と呼ばれる。(7.27) は ω が完全形式である時、 ω は閉形式であることを示している。しかし、逆は一般には成立しない。すなわち、 $\varphi = d\alpha$ ならば $d\varphi = d(d\alpha) = 0$ であるが、 $d\varphi = 0$ であるからといって $\varphi = d\alpha$ と書けるとは限らない。この例としては、 $\text{rot grad } f = 0$ は常に成立するが、 $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ であるからといって $\mathbf{A} = \text{grad } f$ なる 1 値関数 f が必ずしも存在しない。これは、ある領域に磁場が存在しないからといってベクトルポテンシャルが空間の全領域にわたって一値関数であるとは限らないことを意味している (アハラノフ-ボーム効果)。

逆が成立する場合に関しては次のポアンカレの補題 (Poincaré's lemma) が重要である。

Theorem 28 (ポアンカレの補題) 多様体 M が 1 点に連続的に収縮可能ならば²、開集合 $U \subset M$ 上のすべての閉形式は完全微分である。

$d\omega = 0$ ならば局所的には $\omega = d\alpha$ なる α は存在しうるが、 ω が完全微分であるためにはそのような α が大域的に、すなわち、多様体全体で存在する必要がある。ポアンカレの補題はそのための条件を示している。

与えられた微分形式が完全微分であるための条件を具体的に考察しよう。完全微分が存在すれば、履歴に依らない場所だけの関数であるポテンシャルが存在する。微分形式は多様体の局所的性質、その積分系は大域的性質を表している。物理ではマクスウェル方程式で $\text{div } \mathbf{B} = 0$ から $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ をしばしば結論するが、前者が局所的性質、後者は大域的性質に関するものであり、そのような導出が正当化されるための数学的条件を調べるのが目的である。まずは簡単な例から始めよう。

¹ 1 値性がなぜ必要かは後に明らかにされる (10.4 節参照)。

² たとえば、 n 次元の球体がこの条件を満たす。

10.2 積分可能条件

1-形式に関する方程式 $\omega = 0$ は1階の1次微分方程式とみなせる。すなわち、

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (10.1)$$

この方程式の積分可能条件を考えよう。積分可能であれば、あるスカラー関数 f が存在して $\omega = df$ と書ける。すなわち、 ω の積分可能性 (integrability) は完全性 (exactness) と同じである。この時、

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (10.2)$$

なので、積分可能条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (10.3)$$

と書ける。

(10.1) のように1-形式が2変数の場合は、 ω が完全微分でない場合も適当な積分因子 λ を掛けることで完全微分にすることができる。すなわち、

$$\lambda(Pdx + Qdy) = df \quad (10.4)$$

このための必要十分条件は

$$\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x} \quad (10.5)$$

である。この時、 λ は次のように与えられる。

$$\lambda = \frac{1}{P} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (10.6)$$

例として熱力学の例を考えよう。次の1-形式を考える。

$$\omega = PdV + dU \quad (10.7)$$

ここで、 P, V, U はそれぞれ圧力、体積、内部エネルギーである。上の結果からこの1-形式は適当な積分因子を掛けることにより完全微分にすることができる。それを $1/T(U, V)$ と書くと

$$dS := \frac{\omega}{T} = \frac{P}{T}dV + \frac{1}{T}dU \quad (10.8)$$

S はエントロピーである。 ω は熱量の変化 $\delta'Q$ であるが、この量は完全微分ではない。(10.8) より

$$dU = TdS - PdV \quad (10.9)$$

U を S, V の関数とみなして両辺の外微分をとると、 $d(dU) = 0$ より

$$0 = \frac{\partial T}{\partial V} dV \wedge dS - \frac{\partial P}{\partial S} dS \wedge dV \quad (10.10)$$

よって

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \quad (10.11)$$

これは Maxwell の関係式である。

10.3 フロベニウスの条件

n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の原点で 0 にならない 1-形式 $\omega = \omega_i dx^i$ を考える。原点近傍で $\omega = f dg$ を満足する f, g が存在するために必要十分条件は

$$d\omega = \xi \wedge \omega \quad (10.12)$$

を満足する 1-形式 ξ が存在することである。これをフロベニウスの条件 (Frobenius condition) という。この時、

$$\omega \wedge d\omega = 0 \quad (10.13)$$

である。

実際、 $\omega = f dg$ が成立すると仮定すると

$$d\omega = df \wedge dg = df \wedge f^{-1}\omega = d(\ln|f|) \wedge \omega \quad (10.14)$$

なので、(10.12) が成り立つ。

例として、2次元ユークリッド空間における 1-形式 $\omega = Pdx + Qdy$ を考えると、 $\omega \wedge d\omega$ は 3-形式なので 0。よって、 ω は積分可能である。次の例として、 \mathbb{R}^3 における 1-形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ を考えると

$$\begin{aligned} d\omega &= (\partial_y R - \partial_x Q) dy \wedge dz + (\partial_z P - \partial_x R) dz \wedge dx \\ &= +(\partial_x Q - \partial_y P) dx \wedge dy \end{aligned} \quad (10.15)$$

よって、 ω が積分可能である条件 (10.13) は

$$P(\partial_y R - \partial_x Q) + Q(\partial_z P - \partial_x R) + R(\partial_x Q - \partial_y P) = 0 \quad (10.16)$$

で与えられる。

これまで個別の例を調べてきたが、ここでは領域 D 上で定義された C^1 級 (すなわち 1 回微分可能) の 1-形式 (1 次微分形式)

$$\omega = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz \quad (10.17)$$

が完全微分であるための条件を調べよう。ここで、完全微分であるとは、 C^2 級のスカラー場 f が存在して $\omega = df$ が成立することをいう。ベクトル解析の言葉でいうと、 $\vec{\omega} := (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \text{grad } f$ なるポテンシャル f が存在するための条件である。 $d(df) = 0$ なので、そのようなポテンシャルは $\text{rot grad } f = 0$ を満足する。これは、渦なし (irrotational) 条件という³。

完全微分の条件としては次の定理が重要である。

Theorem 29 (完全微分の条件 (ポテンシャルの存在条件)) 領域 D 上の C^1 級の 1-形式 ω が完全微分であるための必要十分条件は、 D 内の任意の C^1 級閉曲線 C に対して次式が成立することである。

$$\oint_C \omega = 0 \quad (10.18)$$

必要性: $\omega = df$ の時は、 P を C 上の任意の点として

$$\oint_C \omega = \oint_C df = f(P) - f(P) = 0 \quad (10.19)$$

が成立する。

十分性:(10.18) が成立すると、 $\int_Q^P \omega$ は途中の経路には依らないので $\int_Q^P \omega =: f(P)$ なるスカラー場 f が存在する。よって、 $\omega = df$ が成立する。(証明終わり)

10.4 空間の連結性とポテンシャルの存在条件

Theorem 30 単連結領域 D で閉じた (すなわち、 $d\omega = 0$) C^1 級 1-形式 ω は完全微分である。

この定理から単連結領域での渦なしベクトル場はポテンシャル f を持つことが分かる ($\text{rot } \vec{\omega} = 0$ ならば $\vec{\omega} = \text{grad } f$ と書ける)。

単連結性の重要性を理解するために、単連結でない例を考えてみよう。領域 D として 3 次元空間から z 軸を除外した領域

$$D : x^2 + y^2 > 0 \quad (10.20)$$

³回転 (rot) が存在しないから。

で定義された 1-形式

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad (10.21)$$

を考えよう。これは閉形式である。実際

$$d\omega = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] dx \wedge dy = 0 \quad (10.22)$$

また、

$$\omega = df, \quad f = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (10.23)$$

と書けるので、 ω は完全微分のように一見思えるが、 f は 1 価関数ではないので完全微分ではない。実際、 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ とおくと、 $f = \theta$ なので z 軸の周りに半径 1 の円に沿って 1 周線積分すると

$$\oint_C \omega = \oint_C df = 2\pi \neq 0 \quad (10.24)$$

となり、条件 (10.18) を満たさない⁴。

10.5 ベッチ数

上の例から分かるように、定義域 D が単連結でないとき閉形式 $d\omega = 0$ から $\omega = df$ なる 1 価の関数は一般には存在せず、多価関数となる。しかし、積分 $\int_Q^P \omega$ の多価性は基本周期 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ の線形結合であらわされ、その係数は整数となる。

$$n_1\alpha_1 + \dots + n_r\alpha_r, \quad n_i (i = 1, \dots, r) \text{ は整数} \quad (10.25)$$

ここで基本周期は

$$\alpha_i = \int_{C_i} \omega \quad (10.26)$$

で与えられる。また、 C_i は基本回路と呼ばれる。基本周期の数 r は定義域 D の 1 次元ベッチ数 (Betti number) と呼ばれる。

$$r = b_1(D) \quad (10.27)$$

一般に k 次元のベッチ数 b_k は、単連結でない k 次元曲面の数のことをいう。具体的には

⁴(10.24) の周回積分が 2π となっていることは、 f が量子力学における位相に関連づけられる量であることを示唆している。

- b_0 : 連結された成分の数
- b_1 : 1次元の閉曲線で囲むことのできる穴の数
- b_2 : 2次元の閉曲面で囲むことのできる穴の数

トーラスは $b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1$ で特徴づけられる。液体ヘリウムや超伝導などで見られる量子渦は $b_1 = 1$ で特徴づけられる線欠陥、モノポールは $b_2 = 1$ で特徴づけられる点欠陥である。一般に、領域の非連結性に由来するゼロでないベッチ数で特徴づけられる対象物はトポロジカル欠陥と呼ばれる。

ベッチ数を用いると、完全形式が存在する条件は次のように定式化できる。

Theorem 31 領域 D が基本回路系 C_1, \dots, C_r を持つ時、 D 上の C^2 級 (すなわち、2回微分可能) の1-形式 ω が完全微分であるための条件は、 $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ である。特に、 $b_1 = 0$ ならば、 D 上の C^1 級閉1-形式は完全微分である。

同様に、 $b_2(D) = 0$ の場合は次のヘルムホルツの定理 (Helmholtz theorem) が成立する。

Theorem 32 (ヘルムホルツの定理) 領域 D の C^2 級ベクトル場 \mathbf{B} は D 上のスカラー場 f とベクトル場 \mathbf{A} を用いて次のように分解できる。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} + \text{grad } f \quad (10.28)$$

ここで、スカラー場 f は次式を満足する。

$$\text{div } \mathbf{B} = \Delta f \quad (10.29)$$

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (10.30)$$

実際、(10.28) より $\text{div}(\mathbf{B} - \nabla f) = 0$ なので $b_2(D) = 0$ ならば、 D 上に C^1 級のベクトル場 \mathbf{A} が存在して、 $\mathbf{B} - \nabla f = \text{rot } \mathbf{A}$ が成立する。以上をまとめると

局所的性質 大域的性質

$$b_1(D) = 0 \rightarrow \text{rot } \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{B} = \text{grad } f \quad (10.31)$$

$$b_2(D) = 0 \rightarrow \text{div } \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (10.32)$$

第11章 微分形式の応用

11.1 ホッジスター演算子

ホッジ (Hodge) スター演算子¹は、 n 次元空間の k -形式から $(n-k)$ -形式を作る演算子である。 n 次元空間の k -形式は ${}_nC_k$ 個の基底から構成され、 $(n-k)$ -形式は ${}_nC_{n-k}$ 個の基底から構成されるので、基底の個数が等しく 1対1の対応が存在する。 n 次元空間の k -形式

$$\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (11.1)$$

に対して、ホッジスター演算子 $*\omega$ は次の等式が満足されるように定義される。

$$\omega \wedge *\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (11.2)$$

11.1.1 3次元空間

具体例として、まず、3次元空間 ($n=3$) の場合を考えよう。この時、(11.2) を満足するようにスター演算子を求めると次のようになることがわかる。

$$\begin{aligned} *1 &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad *dx^1 = dx^2 \wedge dx^3, \\ *dx^2 &= -dx^1 \wedge dx^3, \quad *dx^3 = dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2) &= dx^3, \quad *(dx^1 \wedge dx^3) = -dx^2, \\ *(dx^2 \wedge dx^3) &= dx^1 \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 1 \quad (11.5)$$

このうち、最初と最後の関係式は左辺が右辺で定義されているとみなしてもよい。これらは次のようにまとめることができる。

$$*dx^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} dx^j \wedge dx^k \quad (11.6)$$

$$*(dx^i \wedge dx^j) = \epsilon^{ijk} dx^k \quad (11.7)$$

¹Sir William Vallance Douglas Hodge, 1903-1975.

(11.6) に ϵ^{ilm} を掛けて公式

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (11.8)$$

を用いると

$$dx^i \wedge dx^j = \epsilon^{ijk} * dx^k \quad (11.9)$$

が得られる。また、(11.7) の両辺に ϵ^{ijl} を掛けて同様の計算をすると

$$dx^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} * (dx^j \wedge dx^k) \quad (11.10)$$

が得られる。特に、

$$*(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) = \epsilon^{ijk} \quad (11.11)$$

であることに注意しよう。また、3次元の場合は k -形式 ω に対して

$$**\omega = \omega \quad (11.12)$$

が成立することは上記の結果から確かめることができる²。 dx^i の具体的な表式を考える際には注意が必要である。3次元直交座標 (x, y, z) の場合は $dx^1 = dx$, $dx^2 = dy$, $dx^3 = dz$ であるが、極座標 (r, θ, ϕ) の場合は、 $dx^1 = dr$, $dx^2 = r d\theta$, $dx^3 = r \sin \theta d\phi$ ととらなければならない。実際、このように取ることで、微小ベクトルが各座標表示における正規直交単位ベクトルを用いて統一的な形に書くことができる。

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin \theta d\phi \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i dx^i \end{aligned}$$

同様な考え方で、円筒座標の場合は $dx^1 = dr$, $dx^2 = r d\theta$, $dx^3 = dz$ である。

具体例としてまず、0-形式 (スカラー場) f を考える。 $df = \partial_i f dx^i$ なので (11.6) より

$$*df = \partial_i f * dx^i = \partial_i f \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} dx^j \wedge dx^k$$

が得られる。両辺の外微分をとると

$$d * df = \partial_l \partial_i f * dx^i = \partial_l \partial_i f \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k$$

²一般の n 次元の k -形式 ω については $**\omega = (-1)^{(n-k)k} \omega$ が成立する。たとえば、 $n=2$ の場合は、 $*dx^1 = dx^2$, $*dx^2 = -dx^1$ なので $**dx^1 = -dx^1$ となる。

ここで、 $dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k = \epsilon^{ljk} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ を使い、更に、 $\epsilon^{ijk} \epsilon^{ljk} = 2\delta_{il}$ を用いると

$$d * df = \partial_i^2 f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

であることが分かる。($dd = 0$ であるが、 $d * d \neq 0$ であることに注意せよ。) 両辺のホッジスターをとり、(11.5) を用いると

$$*d * df = \partial_i^2 f = \Delta f$$

であることが分かる。このように、スカラー関数に対するラプラシアン (Laplacian) $\Delta = \nabla^2$ はホッジスター演算子を用いて表すことができる。

次に 1-形式を考えよう。

$$\omega = \omega_i dx^i \tag{11.13}$$

を考えよう。この外微分は

$$d\omega = (\partial_i \omega_j) dx^i \wedge dx^j \tag{11.14}$$

であるが、右辺に (11.9) を代入するとを考えよう。この外微分は

$$d\omega = \epsilon^{ijk} (\partial_i \omega_j) * dx^k = (\text{rot} \vec{\omega})_k * dx^k \tag{11.15}$$

と書けることが分かる。ここで、 $\vec{\omega} := (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ である。(11.15) の両辺に * を演算して (11.12) を用いると

$$*d\omega = \epsilon^{ijk} (\partial_i \omega_j) * dx^k = (\text{rot} \vec{\omega})_k dx^k \tag{11.16}$$

が得られる。この両辺の外微分を更にとると

$$d * d\omega = \epsilon^{ijk} (\partial_i \partial_l \omega_j) dx^l \wedge dx^k \tag{11.17}$$

両辺に * を作用させて (11.11) を用いると

$$\begin{aligned} *d * d\omega &= (\partial_i \partial_j \omega_j - \partial_j^2 \omega_i) dx^i \\ &= (\text{graddiv} \vec{\omega} - \Delta \vec{\omega})_i dx^i \\ &= (\text{rotrot} \vec{\omega})_i dx^i \\ &= (\text{graddiv} \vec{\omega} - \Delta \vec{\omega})_i dx^i \end{aligned} \tag{11.18}$$

を得る。最後の等式は 1-形式の外微分が回転であることを用いた。

一方で、(11.13) と双対の関係にある微分形式は

$$*\omega = \omega_i * dx^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_i dx^j \wedge dx^k \tag{11.19}$$

両辺の外微分をとると

$$\begin{aligned} d * \omega &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\partial_l \omega_i) dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l \\ &= \operatorname{div} \vec{\omega} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned} \quad (11.20)$$

両辺に*を作用させて (11.11) を用いると

$$*d * \omega = \partial_i \omega_i = \operatorname{div} \vec{\omega} \quad (11.21)$$

が得られる。この両辺の外微分をとると

$$d * d * \omega = (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\omega})_i dx^i \quad (11.22)$$

が得られる。これを (11.18) と組み合わせると、1-形式に対するラプラシアン³の公式

$$\Delta \omega = *d * \omega - *d * d \omega \quad (11.23)$$

が得られる。

11.1.2 4次元空間

次に、4次元 ($n = 4$) の場合を考えよう。

$$\begin{aligned} *1 &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \\ *dx^1 &= dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4, \quad *dx^2 = -dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \\ *dx^3 &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4, \quad *dx^4 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned} \quad (11.24)$$

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2) &= dx^3 \wedge dx^4 \\ *(dx^1 \wedge dx^3) &= -dx^2 \wedge dx^4, \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (11.25)$$

$$*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = dx^4, \quad *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4) = -dx^3 \quad (11.26)$$

$$*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4) = 1 \quad (11.27)$$

また、4次元の場合は k -形式 ω に対して

$$**\omega = (-1)^k \omega \quad (11.28)$$

が成立することは上記の結果から確かめることができる³。

³一般に n 次元空間の k -形式については $**\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$ が成立する。

11.2 電磁気学

座標の反転に対して符号を変える極性ベクトル (polar vector) である電場は 1-形式、符号を変えない軸性ベクトル (axial vector) である磁場は 2-形式である。これと時空の次元についての知識から電磁場の基礎方程式の大枠が定まる。

11.2.1 静電場

静電場の場合、空間の次元は $n = 3$ である。以下では、デカルト座標 (x, y, z) をとり、 $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ と定義する。静電場の 1-形式を次のように書こう。

$$\omega_e = E_i(x^1, x^2, x^3) dx^i \quad (11.29)$$

(11.15) より

$$\begin{aligned} d\omega_e &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\text{rot} \mathbf{E})_i dx^j \wedge dx^k \\ &= (\text{rot} \mathbf{E})_i * dx^i \end{aligned} \quad (11.30)$$

ω_e に双対な 2-形式を ω_e にホッジスター演算子を作用させることで導入する。(11.19) から

$$*\omega_e = E_i * dx^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} E_i dx^j \wedge dx^k \quad (11.31)$$

この外微分は (11.20) より

$$d * \omega_e = (\text{div} \mathbf{E}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad \longleftrightarrow *d * \omega_e = \text{div} \mathbf{E} \quad (11.32)$$

こうして静電場を記述する方程式は次のように書ける。

$$d\omega_e = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (11.33)$$

$$*d * \omega_e = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \longleftrightarrow \quad \text{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (11.34)$$

ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率である。 \mathbb{R}^3 が単連結な時は、(11.33) からポアンカレの補題 (10.1 節参照) により ω_e はスカラー関数 ϕ を用いて次のように書ける。

$$\omega_e = -d\phi \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{E} = -\text{grad} \phi \quad (11.35)$$

11.2.2 静磁場

静磁場は軸性ベクトルなので 2-形式

$$\begin{aligned}\omega_m &:= B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k = B_i * dx^i\end{aligned}\quad (11.36)$$

で表される。 ω_m の外微分は

$$\begin{aligned}d\omega_m &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\partial_l B_i) dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= (\operatorname{div} \mathbf{B}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\end{aligned}\quad (11.37)$$

ω_m に双対な 1-形式 $*\omega_m$ を導入する。

$$\begin{aligned}*\omega_m &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B_i * (dx^j \wedge dx^k) \\ &= B_i dx^i\end{aligned}\quad (11.38)$$

この外微分は

$$\begin{aligned}d * \omega_m &= (\partial_i B_j) dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\operatorname{rot} \mathbf{B})_i dx^j \wedge dx^k \\ &= (\operatorname{rot} \mathbf{B})_i * dx^i\end{aligned}\quad (11.39)$$

これらを用いると静磁場を記述する方程式は次のように書ける。

$$d\omega_m = 0 \longleftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (11.40)$$

$$*d * \omega_m = \omega_j \longleftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (11.41)$$

ここで、 $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ は電流密度、 μ_0 は真空の透磁率、また、

$$\omega_j = \mu_0 j_i dx^i \quad (11.42)$$

\mathbb{R}^3 が単連結な時は、(11.40) よりポアンカレの補題 (10.1 節参照) により ω_m は (極性) ベクトル関数 \mathbf{A} を用いて次のように書ける。

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (11.43)$$

以上の議論から、電場と磁場の間には次のような双対関係 (duality relations) があることが分かる。

$$\omega_e \longleftrightarrow *\omega_m \quad (11.44)$$

$$*\omega_e \longleftrightarrow \omega_m \quad (11.45)$$

11.2.3 マクスウェル方程式

電場と磁場が時間に依存する場合は両者は互いに影響しあう。そこで、時間座標 $x^4 := ict$ を導入して、4次元空間 (x^1, x^2, x^3, x^4) で考える。本節では、ここで、ローマ文字 i, j, k, l は 1, 2, 3 をとり、ギリシャ文字 $\lambda, \mu, \nu, \sigma$ は 1, 2, 3, 4 をとるものとする。また、光速 c は 1 とおく。

まず、電磁テンソルに対応する微分形式を考える。

$$\begin{aligned}\omega_{em} &:= -i\omega_e \wedge dx^4 + \omega_m \\ &= -iE_i dx^i \wedge dx^4 + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k\end{aligned}\quad (11.46)$$

4次元空間の場合は、

$$\begin{aligned}*(dx^1 \wedge dx^4) &= dx^2 \wedge dx^3 = \frac{1}{2}\epsilon^{1jk} dx^j \wedge dx^k \\ *(dx^2 \wedge dx^4) &= -dx^1 \wedge dx^3 = \frac{1}{2}\epsilon^{2jk} dx^j \wedge dx^k\end{aligned}\quad (11.47)$$

なので、一般に

$$*(dx^i \wedge dx^4) = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} dx^j \wedge dx^k \quad (11.48)$$

が成立することに注意すると、(11.46) は次のように電場と磁場の双対性のはっきりと見える形に書くことができる。

$$\begin{aligned}\omega_{em} &= -i\omega_e \wedge dx^4 + \omega_m \\ &= -iE_i dx^i \wedge dx^4 + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k \\ &= -iE_i dx^i \wedge dx^4 + B_i *(dx^i \wedge dx^4)\end{aligned}\quad (11.49)$$

両辺の Hodge スター演算子をとると、 ω が 2-形式のときは $**\omega = \omega$ であることに注意して、

$$\begin{aligned}*\omega_{em} &= -iE_i *(dx^i \wedge dx^4) + B_i dx^i \wedge dx^4 \\ &= -\frac{i}{2}E_i \epsilon^{ijk} dx^j \wedge dx^k + B_i dx^i \wedge dx^4\end{aligned}\quad (11.50)$$

が得られる。ここで、2行目の結果を得る際に (11.48) を用いた。

これらの外微分計算すると

$$\begin{aligned}d\omega_{em} &= -\frac{i}{2}\epsilon^{ijk} \left[\text{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \right]_k dx^i \wedge dx^j \wedge dx^4 \\ &\quad + (\text{div}\mathbf{B}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\end{aligned}\quad (11.51)$$

$$\begin{aligned}d*\omega_{em} &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \left[\text{rot}\mathbf{B} - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \right]_k dx^i \wedge dx^j \wedge dx^4 \\ &\quad - i(\text{div}\mathbf{E}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\end{aligned}\quad (11.52)$$

が得られる。($c = 1$ なので $\epsilon_0 \mu_0 = 1$ に注意せよ。)

電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} から

$$\omega_{\rho j} := -\frac{i}{\epsilon_0} \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \mu_0 j_k dx^i \wedge dx^j \wedge dx^4 \quad (11.53)$$

を定義する。この式の外微分を取ると

$$d\omega_{\rho j} = \mu_0 \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \quad (11.54)$$

が得られる。従って、連続の方程式は次のように書ける。

$$d\omega_{\rho j} = 0 \iff \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (11.55)$$

以上の結果から、マクスウェル方程式は次のように書ける。

$$d\omega_{em} = 0 \iff \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (11.56)$$

$$d * \omega_{em} = \omega_{\rho j} \iff \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.57)$$

(11.56) 式は微分形式 ω_{em} が閉形式であることを示している。時空が単連結な時は、 ω_{em} は完全微分である⁴。従って、ある 1 形式

$$A := A_\mu dx^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (11.58)$$

が存在して

$$\omega_{em} = dA \quad (11.59)$$

が成立する。実際、(11.58) より

$$dA = (\partial_\mu A_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (11.60)$$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (11.61)$$

となるので、これらを (11.46) と比較すると

$$E_i = iF_{i4}, \quad B_i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} \quad (11.62)$$

であることが分かる。 A_μ の各成分は電磁ポテンシャル (\mathbf{A}, ϕ) と

$$A_\mu = \begin{cases} A_i & (\mu = i = 1, 2, 3) \\ i\phi & (\mu = 4) \end{cases} \quad (11.63)$$

⁴単連結でない場合は、電磁ポテンシャルは 1 価でなくなる。この時、アハラノフ・ボーム・キャッシャー効果 (Aharonov-Bohm-Casher effect) が現れる。

なる関係で結ばれている。こうして、マクスウェル方程式の第1の組(11.56)は

$$ddA = 0 \quad (11.64)$$

と恒等式の形で書ける($dd = 0$ であることに注意せよ)。第2の組(11.57)は

$$d * dA = \omega_{\rho j} \quad (11.65)$$

と書けることがわかる。

ゲージ変換は、電磁ポテンシャルを任意のスカラー関数 χ を用いて

$$A \longrightarrow A' = A + d\chi \quad (11.66)$$

と変換することに相当する。この時、

$$A' = (A_\mu + \partial_\mu \chi) dx^\mu \quad (11.67)$$

なので、電磁ポテンシャルの各成分は

$$A_i \rightarrow A_i + \partial_i \chi, \quad \phi \rightarrow \phi - \partial_t \chi \quad (11.68)$$

と変換される。マクスウェル方程式がゲージ変換に対して不変性は $dd\chi = 0$ という恒等式の帰結である。

(11.64) は4階の完全反対称テンソル $\epsilon^{\lambda\mu\nu\sigma}$ を用いて

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (11.69)$$

と書くこともできる。これはビアンキ恒等式 (Bianchi identity) と呼ばれているものである⁵。以上のように、マクスウェル方程式は、特定の座標系という表示によらない一般的な形式で書くことができる。特定の座標系による表示とは、そのような座標系から見ている観測者にとっての法則であるといえる。物理法則が座標系によらない微分形式で書けることは、物理法則が観測者の見方によらない普遍的なものであるという事実を反映している。

11.3 曲線座標系

本節では、極座標や円筒座標などの一般の座標系 (u^1, \dots, u^n) において、勾配 (grad)、回転 (rot)、発散 (div) などがどのように書けるかを考察す

⁵ ビアンキ恒等式はホッジスター演算子が定義される多様体上で一般に成立する恒等式である。

る。その過程で、微分形式が、座標系の取り方に依らない普遍的な記述形式であることの威力を味わってほしい。まず、一般座標系におけるある点を表すベクトルを \mathbf{x} とし、その微分量 $d\mathbf{x}$ を一般の曲線座標系 (curvilinear coordinate system) (u^1, \dots, u^n) で表すことを考えよう。

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} du^i \quad (11.70)$$

ここで、一般座標系における 1 に規格化された基底ベクトルを

$$\mathbf{e}_i := \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}\right)^2}} \quad (11.71)$$

で定義し、右辺の分母を

$$g_i := \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}\right)^2} \quad (11.72)$$

とおくと

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_i dx^i \quad (11.73)$$

が得られる。こうして、一般座標系における (11.70) に対応する表式

$$dx^i = g_i du^i \quad (11.74)$$

が得られる。

次に、一般座標系における勾配、回転、発散を求めよう。

11.3.1 勾配

まず、勾配 (gradient) は 0-形式 f の外微分から得られるので、

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i = \frac{1}{g_i} \frac{\partial f}{\partial u^i} dx^i \quad (11.75)$$

から

$$(\text{grad} f)_i = \frac{1}{g_i} \frac{\partial f}{\partial u^i} \quad (11.76)$$

であることが分かる。

11.3.2 回転

回転 (rotation) は 1-形式 ω の外微分から得られる。(11.74) より

$$\omega = \omega_j dx^j = \omega_j g_j du^j \quad (11.77)$$

両辺の外微分をとると

$$d\omega = \frac{\partial(\omega_j g_j)}{\partial u^i} du^i \wedge du^j = \frac{1}{g_i g_j} \frac{\partial(\omega_j g_j)}{\partial u^i} dx^i \wedge dx^j \quad (11.78)$$

ここで、ウェッジ積 $dx^i \wedge dx^j$ の反対称性を利用すると、(11.78) は次のように書ける。

$$d\omega = \frac{1}{2g_i g_j} \left(\frac{\partial(\omega_j g_j)}{\partial u^i} - \frac{\partial(\omega_i g_i)}{\partial u^j} \right) dx^i \wedge dx^j \quad (11.79)$$

これが求める表式である。

3次元の場合は、(11.7) の両辺に*を作用させたものを(11.78) に代入すると

$$*d\omega = \epsilon^{ijk} \frac{1}{g_i g_j} \frac{\partial(\omega_j g_j)}{\partial u^i} * dx^k \quad (11.80)$$

両辺に*を作用させると

$$**d\omega = \epsilon^{ijk} \frac{1}{g_i g_j} \frac{\partial(\omega_j g_j)}{\partial u^i} dx^k \quad (11.81)$$

これが3次元の場合の回転の一般式である。ここで、

$$(\text{rot} \vec{\omega})_i := \epsilon^{ijk} \frac{1}{g_j g_k} \frac{\partial(\omega_k g_k)}{\partial u^j} \quad (11.82)$$

を定義すると、(11.80) は

$$*d\omega = (\text{rot} \vec{\omega})_i dx^i, \quad \vec{\omega} := (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (11.83)$$

と書ける。

11.3.3 発散

発散 (divergence) は 2-形式の外微分から得られる。一般に 2-形式は

$$\Omega = \frac{1}{2} \Omega_{jk} dx^j \wedge dx^k = \frac{1}{2} \Omega_{jk} g_j g_k du^j \wedge du^k, \quad \Omega_{jk} = -\Omega_{kj} \quad (11.84)$$

のように書くことができる。両辺の外微分をとると

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\Omega_{jk}g_jg_k)}{\partial u^i} du^i \wedge du^j \wedge du^k \\ &= \frac{1}{2g_i g_j g_k} \frac{\partial(\Omega_{jk}g_jg_k)}{\partial u^i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \end{aligned} \quad (11.85)$$

これが発散の一般式である。

3次元の場合は、 $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \epsilon^{ijk} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ であるから、(11.85) は

$$d\Omega = \frac{1}{2g_1 g_2 g_3} \epsilon^{ijk} \frac{\partial(\Omega_{jk}g_jg_k)}{\partial u^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (11.86)$$

と書ける。両辺の*をとり、 $*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 1$ を用いると、

$$*d\Omega = \frac{1}{2g_1 g_2 g_3} \epsilon^{ijk} \frac{\partial(\Omega_{jk}g_jg_k)}{\partial u^i} \quad (11.87)$$

が得られる。

(11.87) の右辺を具体的に書き下すと

$$\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \frac{\partial(\Omega_{jk}g_jg_k)}{\partial u^i} = \frac{\partial(\Omega_{23}g_2g_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(\Omega_{31}g_3g_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(\Omega_{12}g_1g_2)}{\partial u_3} \quad (11.88)$$

が得られる。そこで、

$$\Omega_{23} =: \Omega_1, \quad \Omega_{31} =: \Omega_2, \quad \Omega_{12} =: \Omega_3 \quad (11.89)$$

とおくと (11.87) は次のようによく知られた発散の形に書ける。

$$*d\Omega = \frac{1}{2g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial(\Omega_1 g_2 g_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(\Omega_2 g_3 g_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(\Omega_3 g_1 g_2)}{\partial u_3} \right] \quad (11.90)$$

が得られる。

3次元の場合は2-形式が1-形式に*を作用させることによって得られることに着目すると、発散に対する等価な表式が得られる。1-形式 $\omega = \omega_i dx^i$ に*を作用させて (11.6) を用いると

$$*\omega = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_i dx^j \wedge dx^k = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_i g_j g_k du^j \wedge du^k \quad (11.91)$$

この式の外微分を取ると

$$\begin{aligned} d*\omega &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \frac{\partial(\omega_i g_j g_k)}{\partial u^l} du^l \wedge du^j \wedge du^k \\ &= \frac{1}{2g_1 g_2 g_3} \epsilon^{ijk} \frac{\partial(\omega_i g_j g_k)}{\partial u^l} dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k \end{aligned} \quad (11.92)$$

両辺の*をとり、 $*(dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k) = \epsilon^{ljk}$ をもちいると

$$*(d*\omega) = \frac{1}{2g_1g_2g_3} \epsilon^{ljk} \epsilon^{ijk} \frac{\partial(\omega_i g_j g_k)}{\partial u^l} \quad (11.93)$$

ここで、 $\epsilon^{ijk} \omega_i =: \Omega_{jk}$ とおくと

$$*(d*\omega) = \frac{1}{2g_1g_2g_3} \epsilon^{ijk} \frac{\partial(\Omega_{jk} g_j g_k)}{\partial u^i} = *d\Omega \quad (11.94)$$

となり、(11.87) が再現される。左辺は 1-形式 ω から出発した発散の式、右辺は 2-形式 Ω から出発した式である。3次元の場合は、両者はホッジスター演算子によって関係づけられていることが見て取れる。

11.3.4 ラプラシアン

ラプラシアンは 2 階の偏微分から構成されるスカラー量である。 f をスカラー場であるとする、そこから 2 階の微分を作るためには外微分 d を 2 回作用させる必要がある。まず、一回目の作用をさせると

$$df = \partial_i f du^i = \frac{1}{g_i} \partial_i f dx^i \quad (11.95)$$

ここで、 $\partial_i := \partial/\partial u^i$ である。 d を 2 回連続で作用するとゼロになるので ($d^2 = 0$)、それはできない。それを避けるために、両辺にホッジスター演算子*を作用させて、(11.6) を用いると

$$*df = \frac{1}{2g_i} \partial_i f \epsilon^{ijk} dx^j \wedge dx^k = \frac{g_j g_k}{2g_i} \partial_i f \epsilon^{ijk} du^j \wedge du^k \quad (11.96)$$

この両辺の外微分をとると、

$$d*df = \frac{1}{2} \partial_l \left(\frac{g_j g_k}{g_i} \partial_i f \right) \epsilon^{ijk} du^l \wedge du^j \wedge du^k \quad (11.97)$$

が得られる。2 階の微分形式の外微分はベクトル解析における発散 (div) に対応していることを思い出そう。以上の操作は、ベクトル解析の公式 $\Delta = \text{divgrad}$ の操作に対応している。 $du^l \wedge du^j \wedge du^k = \epsilon^{ljk} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$ を代入すると

$$\begin{aligned} d*df &= \frac{1}{2} \partial_l \left(\frac{g_j g_k}{2g_i} \partial_i f \right) \epsilon^{ijk} \epsilon^{ljk} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 \\ &= \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \\ &\quad \times dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned} \quad (11.98)$$

両辺にホッジスター演算子を作用させると求める表式が得られる。

$$\begin{aligned}\Delta &= *d*df \\ &= \frac{1}{g_1g_2g_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{g_2g_3}{g_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{g_3g_1}{g_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{g_1g_2}{g_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right]\end{aligned}\quad (11.99)$$

11.3.5 円筒座標

円筒座標 (cylindrical coordinates) の場合は、

$$u^1 = r, \quad u^2 = \theta, \quad u^3 = z \quad (11.100)$$

なので、

$$g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = 1 \quad (11.101)$$

よって

$$(\text{grad}f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\text{grad}f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\text{grad}f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (11.102)$$

$$\begin{aligned}(\text{rot}\mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ (\text{rot}\mathbf{A})_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\text{rot}\mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (11.103)$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (11.104)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (11.105)$$

11.3.6 極座標

極座標 (polar coordinates) の場合は、

$$u^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad u^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad u^3 = r \cos \theta \quad (11.106)$$

なので、

$$g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = r \sin \theta \quad (11.107)$$

よって

$$(\text{grad}f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\text{grad}f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\text{grad}f)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (11.108)$$

$$\begin{aligned} (\text{rot}\mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ (\text{rot}\mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \\ (\text{rot}\mathbf{A})_\phi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (11.109)$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r^2 \sin \theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial \phi} \right) \quad (11.110)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right] \quad (11.111)$$

11.4 ゲージ理論

群論と微分形式の融合問題として、 n 次元空間の微分可能多様体 M 上のゲージ理論を考えよう。局所座標系を (x^1, x^2, \dots, x^n) とする。

11.4.1 可換ゲージ理論

ゲージポテンシャルが c -数のゲージ理論を可換 (アーベリアン) ゲージ理論という。これは、電磁場中の電荷の運動の問題と同じである。ゲージポテンシャル A_i が正準運動量 p_i と $p_i + A_i$ という形で現れるので (電荷 $q = 1$ とおく)、ゲージポテンシャルは

$$\partial_i - iA_i \quad (11.112)$$

という組み合わせで現れる。ここで、 $\partial_i := \partial/\partial x^i$ である。座標変換 $x^i \rightarrow x^{i'}$ に対して ∂_i は

$$\partial'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \partial_j \quad (11.113)$$

とランク 1 の共変テンソル (covariant tensor of rank 1) として振る舞うので、同じ座標変換に対してゲージポテンシャルも

$$A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} A_j \quad (11.114)$$

のように変換されなければならない。この時、1-形式

$$A = A_i dx^i \quad (11.115)$$

は座標変換に対して不変である。電磁場に相当するゲージ場は 2-形式であり、1-形式 A に外微分を作用させることで得られる。

$$F := dA = dA_i \wedge dx^i = \frac{1}{2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) dx^i \wedge dx^j \quad (11.116)$$

これから、 F は閉形式であることがわかる。

$$dF = ddA = 0 \longrightarrow \operatorname{divrot} \mathbf{A} = 0 \quad (11.117)$$

ここで、 $\mathbf{A} := (A_1, A_2, A_3)$ である。また、 F がゲージ変換

$$A \rightarrow A + d\chi \quad (11.118)$$

に対して不変であることもわかる。

11.4.2 非可換ゲージ理論

可換ゲージ理論におけるゲージポテンシャルは実数値をとるが、非可換ゲージ理論のゲージポテンシャルはリー代数に値をもつ 1-形式である。ここでは、その中の最も簡単な SU(2) 理論を考える。この時、ゲージポテンシャルは 2 行 2 列のトレースレス反エルミート行列の 1-形式である。

$$A = A_j(i\sigma_j) = \begin{pmatrix} iA_3 & iA_1 + A_2 \\ iA_1 - A_2 & -iA_3 \end{pmatrix} \quad (11.119)$$

ここで、 σ_j ($j = 1, 2, 3$) はパウリ行列である。2-形式であるゲージ場は A の外微分とウェッジ積から構成される。

$$F = dA + A \wedge A \quad (11.120)$$

右辺の第 2 項は A が行列なので残る。実際、

$$\begin{aligned} F &= dA_i \wedge dx^i + A_i dx^i \wedge A_j dx^j = \partial_j A_i dx^j \wedge dx^i + A_i A_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]) dx^i \wedge dx^j := F_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad (11.121) \end{aligned}$$

よって

$$F_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]) \quad (11.122)$$

右辺の第二項はゲージポテンシャルに非可換性のために現れる。この項が存在するために、 F は閉形式ではない。実際、(11.121) より

$$\begin{aligned} dF &= d(dA) + dA \wedge A - A \wedge dA = dA \wedge A - A \wedge dA \\ &= (dA + A \wedge A) \wedge A - A \wedge (dA + A \wedge A) \\ &= F \wedge A - A \wedge F \quad (11.123) \end{aligned}$$

こうして

$$dF - F \wedge A + A \wedge F = 0 \quad (11.124)$$

が得られる。これは SU(2) ゲージ理論におけるビアンキ恒等式 (Bianchi identity) である。

11.4.3 チャーン・サイモンズ理論

第一チャーン形式

ゲージ場の外微分として与えられる形式をチャーン形式 (Chern form) という。まず、 F を 2π で割った量 C_1 を第一チャーン形式 (first Chern

form) と呼ばれる。

$$C_1 := \frac{1}{2\pi} F = \frac{1}{2\pi} dA = \frac{1}{4\pi} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) dx^i \wedge dx^j \quad (11.125)$$

また、

$$Y_1 := \frac{1}{2\pi} A \quad (11.126)$$

をチャーン・サイモンズ 1-形式 (Chern-Simons 1-form) という。

議論を具体的にするために、2次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 を考えよう。 C_1 を考えている多様体上で積分した量 c_1 は、第一チャーン数 (first Chern number) と呼ばれる。今の場合は

$$c_1 := \iint_S C_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_S dA = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial S} A \quad (11.127)$$

ここで、 $S = \mathbb{R}^2$ であり、また、最後の等式を導く際にストークスの定理を用いた。境界 ∂S として、半径 r の円周をとると、 $x^1 = r \cos \theta$, $x^2 = r \sin \theta$ であり、

$$\begin{aligned} A &= A_1 dx^1 + A_2 dx^2 = r(-A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta) d\theta \\ &=: A_\theta(r, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (11.128)$$

なので

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(r, \theta) d\theta \quad (11.129)$$

r を十分大きくとると、 $F \rightarrow 0$ となるので、 A としてはゲージ変換の自由度のみが残る。したがって、 $A_\theta = d\chi(\theta)$ とおくことができるので、

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} (\chi(2\pi) - \chi(0)) \quad (11.130)$$

が得られる。右辺の値は、ゲージ関数 χ の値により、任意の値をとりうる。しかし、ゲージ場 A が波動関数のようなスカラー場に結合すると、波動関数の一価性により右辺は量子化される (整数値のみをとる)。実際、量子力学で学んだように、電磁場のゲージ変換 $A \rightarrow A + d\chi$ に対して、波動関数 ψ は $\psi \rightarrow \psi e^{i\chi}$ とゲージ変換される。波動関数の一価性により、 $\chi(2\pi) - \chi(0)$ は 2π の整数倍でなければならない。それゆえ、第一チャーン数 c_1 は整数値のみをとることがわかる。これが、磁場中の 2次元電子系においてホール伝導度が e^2/h を単位として量子化される量子ホール効果の数学的説明である。

$f = dA$ と書いても、 A が多様体の全領域にわたって一価でない場合がある。このような状況は、物理ではしばしば現れる。そのような場合は、 f は完全形式ではない⁶。例として、多様体 M の 2 つの部分 $M^{(1)}, M^{(2)}$ を考え、 $M = M^{(1)} \cup M^{(2)}$ でかつ、 $M^{(1)} \cap M^{(2)} \neq \emptyset$ 、すなわち、両者は重なり部分を持つとしよう。 $M^{(1)}, M^{(2)}$ 上で定義されたゲージポテンシャルを A_1, A_2 とすると、物理量はゲージの取り方によらないので、重なり部分では観測量である場の強さ (field strength) は等しくなければならない。すなわち、

$$dA_1 = dA_2 \text{ on } M^{(1)} \cap M^{(2)} \quad (11.131)$$

このことは、 $M^{(1)} \cap M^{(2)}$ 上で A_1 と A_2 が互いにゲージ変換で結ばれていれば満足される。すなわち、

$$A_1 - A_2 = d\chi \text{ on } M^{(1)} \cap M^{(2)} \quad (11.132)$$

各領域での第一チャーン数は

$$c_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{M^{(1)}} dA_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M^{(1)}} A_1 \quad (11.133)$$

$$c_1^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{M^{(2)}} dA_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M^{(2)}} A_2 \quad (11.134)$$

話を具体的にするために、 $M = S^2$ とし、 $M^{(1)}$ と $M^{(2)}$ は S^2 からそれぞれ南極部分、北極部分を除外した領域をとろう。この時、境界 ∂M として、赤道をとることができる。この時、Stokes の定理を適用する際に、北半球と南半球で赤道を回る向きを逆にしないといけないことに注意すると、

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{赤道}} (A_1 - A_2) \quad (11.135)$$

が得られる。右辺に (11.132) を代入すると

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} (\chi(\theta = \pi/2, \phi = 2\pi) - \chi(\theta = \pi/2, \phi = 0)) \quad (11.136)$$

ここで、 θ は天頂角、 ϕ は方位角である。(11.136) の右辺の値は、古典論では任意であるが、量子論では整数に量子化される。実際、量子論で領域 $M^{(1)}, M^{(2)}$ に対応する波動関数を $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ とすると、関係式 (11.132) に対応して、波動関数は $\psi^{(1)} = \psi^{(2)} e^{i\chi}$ という関係で結ばれる。波動関数の一価性より、 $\chi(\theta = \pi/2, \phi = 2\pi) - \chi(\theta = \pi/2, \phi = 0)$ は 2π の整数倍でなければならない。従って、 c_1 は整数値をとることが分かる。

⁶10.1 節で議論したように、 f が完全形式であるためには $f = dA$ が一価関数でなければならないことを思い出そう。

第二チャーン形式

次に、 F のウエッジ積で与えられる量を考えよう。これを $8\pi^2$ で割った量を第二チャーン形式 (second Chern form) といい、 C_2 と書く。

$$C_2 := \frac{1}{8\pi^2} F \wedge F = \frac{1}{8\pi^2} F \wedge dA = \frac{1}{8\pi^2} d(F \wedge A) := dY_3 \quad (11.137)$$

ここで、 Y_3 はチャーン・サイモンズ 3-形式 (Chern-Simons 3-form) と呼ばれる。最後の等式を導く際に、 $A \wedge A = A_i A_j dx^i \wedge dx^j = 0$ を用いた。ただし、ゲージ場が非可換な場合は (11.120) のようにゼロにはならない。従って、チャーン・サイモンズ 3-形式は一般に次のように書かれる。

$$Y_3 = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \left(F \wedge A - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (11.138)$$

ここで、 Tr は積分と行列のトレースの両方が含まれる。

(11.137) を \mathbb{R}^4 で積分した量 c_2 は、第二チャーン数 (second Chern number) と呼ばれる。

$$c_2 := \frac{1}{8\pi^2} \int_{M_4} C_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\partial M_4} F \wedge A \quad (11.139)$$

ここで、 ∂M_4 は 4 次元多様体 M_4 の境界を表している。

(11.139) はゲージポテンシャルにあらわに依存しているが、ゲージ変換 $A \rightarrow A + d\chi$ に対して不変である。実際、この時、 c_2 の変化分は

$$\Delta c_2 := \frac{1}{8\pi^2} \int_{\partial M_4} F \wedge d\chi = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\partial M_4} d(F \wedge \chi) = 0 \quad (11.140)$$

$M_4 = \mathbb{R}^4$ の時は

$$c_2 := \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} C_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S_\infty^3} F \wedge A = 0 \quad (11.141)$$

ここで、 S_∞^3 は半径が無限大の 3 次元球面を表している。無限遠では $F \rightarrow 0$ なので、最後の等式が得られる。一方、 M_4 が 2 つの 2 次元多様体 $M_2^{(1)}, M_2^{(2)}$ の直積空間 $M_4 = M_2^{(1)} \times M_2^{(2)}$ の時は、 $F = F^{(1)} + F^{(2)}$ と分解できるので

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{M_2^{(1)} \times M_2^{(2)}} F \wedge F = \frac{1}{2\pi} \int_{M_2^{(1)}} F^{(1)} \frac{1}{2\pi} \int_{M_2^{(2)}} F^{(2)} \\ &= c_1^{(1)} c_1^{(2)} \end{aligned} \quad (11.142)$$

となり、2 つの第一チャーン数 $c_1^{(1)}, c_1^{(2)}$ の積で与えられる。

第12章 微分幾何とトポロジカル現象

これまで学んできたことの総合問題として、微分幾何が物理学におけるトポロジカル現象にどのように応用されるかを考察しよう。まず、そのための基礎概念を説明する。

12.1 引き戻し

引き戻し (pullback) は、変数 $y \in V$ の関数や微分形式を、 $y = \Phi(x)$ によって $x \in U$ で表す操作をいう。これは、複雑な積分計算をより簡単な領域での積分計算に変換するためのテクニックであり、トポロジカル不変量の計算においても威力を発揮する。 V 上の関数 $f(y)$ の引き戻しを Φ^*f と書くと、

$$\Phi^*f = (\Phi^*)f(x) := f(\Phi(x)) \quad (12.1)$$

具体例として、 $(r, \theta) \in U$ 、 $(x, y) \in V$ 、 $(x, y) = \Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とすると、 Φ による $u = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ の引き戻しは

$$\begin{aligned} \Phi^*u &= f \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \right) + g \left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \right) \\ &= (f \cos \theta + g \sin \theta) dr + (-f \sin \theta + g \cos \theta) r d\theta \end{aligned} \quad (12.2)$$

で与えられる。

それでは、いくつかの具体例を見ていこう。

12.2 2次元強磁性体

スピンの大きさが1の強磁性体を考えよう。スピンは古典的に扱い、2次元平面内の任意の方向を向くことができると仮定する。この時、秩序変数は2次元平面内の単位ベクトルとして表される。

$$\hat{m}(\mathbf{r}) = (m_1(\mathbf{r}), m_2(\mathbf{r})) \quad (12.3)$$

あるいは、複素数表示で

$$\psi(\mathbf{r}) = m_1(\mathbf{r}) + im_2(\mathbf{r}) = e^{i\phi(\mathbf{r})}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{m_2}{m_1} \quad (12.4)$$

これから

$$\begin{aligned} d\phi(\mathbf{r}) &= m_1 dm_2 - m_2 dm_1 = (m_1 \nabla m_2 - m_2 \nabla m_1) d\mathbf{r} \\ &=: \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (12.5)$$

定義により、 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = d\phi(\mathbf{r})$ なので、 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ は完全形式のように見えるが、そのためには ϕ が空間の全領域にわたり一価関数である必要がある。しかし、物理的に要求されていることは、 \hat{m} の一価性であり、 ϕ のそれではない。実際、(12.3) から明らかなように、 ϕ には 2π の任意性が存在する。このため、 \mathbf{A} を閉曲線 C に沿って線積分した量を 2π で割った量は整数値 n をとる。実空間で任意の閉曲線 C に沿って一周して元に戻った時に、 ϕ がたどる経路を C_ϕ と書こう。この時、

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_{C_\phi} d\phi \quad (12.6)$$

を巻きつき数 (winding number) という。 $n \neq 0$ の時、トポロジカルな欠陥が存在するという。(12.6) を計算するために、積分の領域を実空間への引き戻しを行う。(12.5) を用いると

$$n = \frac{1}{2\pi} \int d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} \quad (12.7)$$

ここで、 S は C で囲まれた領域、 $d\mathbf{f}$ は面要素である。

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\pi} \nabla m_1 \times \nabla m_2 \quad (12.8)$$

は、欠陥の面密度を表している。ここで、最後の等式は次のようにして示される。

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_i &= \epsilon^{ijk} \partial_j A_k = \epsilon^{ijk} \partial_j (m_1 \partial_k m_2 - m_2 \partial_k m_1) \\ &= 2\epsilon^{ijk} \partial_j m_1 \partial_k m_2 = 2(\nabla m_1 \times \nabla m_2)_i \end{aligned} \quad (12.9)$$

(12.7) の n は実空間の閉曲線 C に沿って一周したときに、対応する秩序変数の角度 ϕ が円周 S^1 を何回まわるかを表す回数であると解釈される。このため、 n は C から C_ϕ への写像の度合い (degree of mapping) とも呼ばれる。この写像において、 C_ϕ 上の任意の点 P に移される C 上の点は、一般に n 個以上ある。それらを P_1, \dots, P_m とすると、 $m \geq n$ である。点 P_i ($i = 1, 2, \dots, m$) から P への写像のヤコビアンを J_i とすると、

$$n = \sum_i \text{sign} J_i \quad (12.10)$$

なる関係式が成立する。

12.3 3次元強磁性体

次に、3次元空間における強磁性体を考える。この時、秩序変数は3次元元的になる。

$$\hat{m}(\mathbf{r}) = (m_1(\mathbf{r}), m_2(\mathbf{r}), m_3(\mathbf{r})), \quad |\hat{m}| = 1 \quad (12.11)$$

3次元空間でのトポロジカル欠陥は、次のように考えることができる。実空間の閉曲面 F を \mathbf{r} が一回掃印したときに、 \hat{m} が半径1の球面 S^2 を何回覆うかを考えよう。その回数がゼロでないときに、 F 内にトポロジカル欠陥があると考えられる。曲面 F は2次元なので2つのパラメータ t_1, t_2 でパラメトライズできる。そこで、 t_1, t_2 を微小量変化させたときの \hat{m} の変化量をそれぞれ $d_1\hat{m}, d_2\hat{m}$ と書くと

$$d_1\hat{m} = \partial_i\hat{m} \frac{\partial x^i}{\partial t_1} dt_1, \quad d_2\hat{m} = \partial_i\hat{m} \frac{\partial x^i}{\partial t_2} dt_2 \quad (12.12)$$

である。 S^2 上で $d_1\hat{m}, d_2\hat{m}$ が囲む面積 $d\Omega$ は

$$\begin{aligned} d\Omega &= \hat{m} \cdot (d_1\hat{m} \times d_2\hat{m}) \\ &= \epsilon^{pqr} m_p \partial_i m_q \partial_j m_r \frac{\partial x^i}{\partial t_1} \frac{\partial x^j}{\partial t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{pqr} m_p (\partial_i m_q \partial_j m_r - \partial_i m_r \partial_j m_q) \frac{\partial x^i}{\partial t_1} \frac{\partial x^j}{\partial t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{pqr} m_p (\partial_i m_q \partial_j m_r - \partial_i m_r \partial_j m_q) \epsilon^{ijk} dS^k \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{pqr} m_p (\nabla m_q \times \nabla m_r) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (12.13)$$

ここで

$$dS^1 = \frac{\partial x^2}{\partial t_1} \frac{\partial x^3}{\partial t_2} dt_1 dt_2, \quad dS^2 = \frac{\partial x^3}{\partial t_1} \frac{\partial x^1}{\partial t_2} dt_1 dt_2, \quad dS^3 = \frac{\partial x^1}{\partial t_1} \frac{\partial x^2}{\partial t_2} dt_1 dt_2 \quad (12.14)$$

は面積要素で、 $d\mathbf{S} = (dS^1, dS^2, dS^3)$ である。(12.13)は次のように書ける。

$$d\Omega = \frac{1}{2} \epsilon^{pqr} m_p (\nabla m_q \times \nabla m_r) \cdot d\mathbf{S} =: \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.15)$$

ここで、

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \epsilon^{pqr} m_p (\nabla m_q \times \nabla m_r) \quad (12.16)$$

こうして、巻き数は

$$n = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_F \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (12.17)$$

で与えられる。ここで、 V は閉曲面 F の内側の領域である。(12.17) の n は閉曲面 F から S^2 への写像の度合いであると解釈できる。

n は閉曲面 F の内側に含まれる点欠陥の数であると解釈できる。また、

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{8\pi} \epsilon^{ijk} \epsilon^{pqr} (\partial_i m_p) (\partial_j m_q) (\partial_k m_r) \quad (12.18)$$

は点欠陥の密度 (density of point singularities) である。

\mathbf{h} を任意のベクトルとして、流れの密度 \mathbf{j} を

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d}) \quad (12.19)$$

で定義すると、連続の方程式

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{d} = 0 \quad (12.20)$$

が満足される。

ρ と \mathbf{j} は次の変換に対して不変である。

$$\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d} + \nabla \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h} + \partial_t \mathbf{v} \quad (12.21)$$

しかし、これらはゲージ群の作用から導かれるわけではないのでゲージ変換ではない。

12.4 特異性を持たない織目構造

12.4.1 秩序変数

超流動ヘリウム 3 はクーパー対が P 波 (角運動量が 1) の超流動状態であり、クーパー対の (相対) 軌道角運動量の方向を表す単位ベクトル \hat{l} とスピンの方向、および、超流動の位相 (ゲージとも呼ばれる) θ によって特徴づけられる。超流動ヘリウム 3 の A 相ではこのうち軌道角運動量と位相 (ゲージとも呼ばれる) が結合し¹、軌道角運動量と位相が空間と時間の関数として決まった値をとる。位相は、 \hat{l} に垂直な互いに直交する 2 つの単位ベクトル \hat{m}, \hat{n} を用いて特徴づける。いま、空間の原点で $\hat{m} = \hat{x}, \hat{n} = \hat{y}, \hat{l} = \hat{z}$ となるように選ぶ。空間の任意に選ばれた点の軌道角運動量の方向に \hat{l} が一致するように $\{\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}\}$ を回転させ、その時の \hat{m}, \hat{n} を \hat{m}_0, \hat{n}_0 と記す。その上で、

$$\hat{m} + i\hat{n} = (\hat{m}_0 + i\hat{n}_0)e^{i\theta} \quad (12.22)$$

¹これを軌道-ゲージ対称性の破れ (broken relative gauge-orbital symmetry) という。

となるように各点での \hat{m}, \hat{n} を定義する。このとき、

$$\hat{m} = \hat{m}_0 \cos \theta - \hat{n}_0 \sin \theta, \quad \hat{n} = \hat{n}_0 \cos \theta + \hat{m}_0 \sin \theta \quad (12.23)$$

なので、超流動速度は次のように書くことができる。

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{M} \nabla \theta = \frac{\hbar}{M} m_i \nabla n_i \quad (12.24)$$

超流動ヘリウム A 相の秩序変数は、このようにして定義された 3 つ組 (triad) と呼ばれる互いに直交する 3 つの単位ベクトルの組 $(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l})$ によって記述される。これら 3 つの単位ベクトルは右手系をなし、 $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ である。秩序変数の対称性は $SO(3) \cong S^3/Z_2$ である。

12.4.2 Mermin-Ho の関係式

超流動の渦度は超流動速度の回転 $\text{rot} \mathbf{v}_s$ によって与えられる。A 相の渦度は角運動量ベクトル \hat{l} だけを用いて

$$\text{rot} \mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{2M} \epsilon^{ijk} l_i \nabla l_j \times \nabla l_k \quad (12.25)$$

と書ける。この関係式はマーミン・ホーの関係式 (Mermin-Ho relation) と呼ばれる。これは次のようにして示すことができる。まず、(12.24) の両辺の i 成分をとると

$$\begin{aligned} \frac{M}{\hbar} (\mathbf{v}_s)_i &= \epsilon^{ijk} (\partial_j m_p) (\partial_k n_p) \\ &= \epsilon^{ijk} (\partial_j (\hat{n} \times \hat{l})_p) (\partial_k (\hat{l} \times \hat{m})_p) \\ &= \epsilon^{ijk} \epsilon^{pab} \epsilon^{pcd} (\partial_j (n_a l_b)) (\partial_k (l_c m_d)) \\ &= \epsilon^{ijk} \partial_j (n_a l_b) [\partial_k (l_a m_b) - \partial_k (l_b m_a)] \end{aligned} \quad (12.26)$$

$\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}$ が互いに直交していることを用い、また、 $\partial_j (l_a^2) = 0$ などを用いると

$$\begin{aligned} \frac{M}{\hbar} (\mathbf{v}_s)_i &= \epsilon^{ijk} (\partial_j l_b) (\partial_k l_a) n_a m_b \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\partial_j l_b) (\partial_k l_a) (n_a m_b - n_b m_a) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla l_a \times \nabla l_b) \epsilon^{abc} l_c \end{aligned} \quad (12.27)$$

こうして (12.25) が成立することが示された。

12.4.3 織目構造

さて、 $(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l})$ が空間的に変化する様子を織目構造 (texture) という。空間の各点における $(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l})$ は、基準となる単位直交ベクトル $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ を $SO(3)$ 回転させることによって得られる。ここで、 $SO(3)$ 回転の行列 R は 3行3列の直交行列であり、

$$R = e^{-i(aS_x + bS_y + cS_z)\theta}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (12.28)$$

で与えられる。ここで、 $S_{x,y,z}$ は直交座標表示におけるスピン 1 行列であり、行列要素は $(S_\alpha)_{\beta\gamma} = -i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ で与えられる。具体的に書き下すと

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.29)$$

これらを (12.28) に代入して計算すると

$$R = \begin{pmatrix} 1 - 2(b^2 + c^2)\sin^2\frac{\theta}{2} & 2ab\sin^2\frac{\theta}{2} - c\sin\theta & 2ac\sin^2\frac{\theta}{2} + b\sin\theta \\ 2ab\sin^2\frac{\theta}{2} + c\sin\theta & 1 - 2(c^2 + a^2)\sin^2\frac{\theta}{2} & 2bc\sin^2\frac{\theta}{2} - a\sin\theta \\ 2ac\sin^2\frac{\theta}{2} - b\sin\theta & 2bc\sin^2\frac{\theta}{2} + a\sin\theta & 1 - 2(a^2 + b^2)\sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (12.30)$$

が得られる。そこで、4次元単位ベクトル

$$(n_\alpha) := (n_1, n_2, n_3, n_4) = \left(a\sin\frac{\theta}{2}, b\sin\frac{\theta}{2}, c\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2} \right) \quad (12.31)$$

を導入すると、 R の行列要素は次のように書ける。

$$R_{ij} = \delta_{ij} + 2[n_i n_j - (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\delta_{ij}] - 2\epsilon^{ijk} n_k n_4 \quad (12.32)$$

$\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ とすると、 $n_\alpha \rightarrow -n_\alpha$ となるが、この時 R_{ij} は不変である。

回転行列 R を用いると $(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l})$ は次のように与えられる。

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r})\hat{x}, \quad \mathbf{n}(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r})\hat{y}, \quad \mathbf{l}(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r})\hat{z} \quad (12.33)$$

これらが互いに直交していることは次のように直接計算で確かめることもできる。

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} \times \mathbf{n})_i &= \epsilon^{ijk} m_j n_k = \epsilon^{ijk} R_{jp} x_p R_{kq} y_q = (\epsilon^{ijk} R_{jp} R_{kq}) x_p y_q \\ &= \epsilon^{pqr} R_{ir} x_p y_q = R_{ir} z_r = l_i \end{aligned} \quad (12.34)$$

このように秩序変数は 4次元単位ベクトル n_α によって完全に特徴づけることができる。そこで、次の量を考える。

$$\omega = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\alpha dn_\beta \wedge dn_\gamma \wedge dn_\delta \quad (12.35)$$

この量の外微分を求めると

$$\begin{aligned}
 d\omega &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (\partial_\epsilon n_\alpha) dn_\epsilon \wedge dn_\beta \wedge dn_\gamma \wedge dn_\delta \\
 &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} dn_\alpha \wedge dn_\beta \wedge dn_\gamma \wedge dn_\delta \\
 &= 24dn_1 \wedge dn_2 \wedge dn_3 \wedge dn_4
 \end{aligned} \tag{12.36}$$

これらに対して、ストークスの定理を適用すると

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega \tag{12.37}$$

半径が1の4次元単位球の体積は $\pi^2/2$ なので²、 D を半径が1の四次元球にとると右辺の値は(12.36)より $12\pi^2$ となる。したがって、4次元球の表面 $\partial D = S^3$ への写像の巻付き数 N は

$$N = \frac{1}{12\pi^2} \int_{S^3} \omega = \frac{1}{12\pi^2} \int_{S^3} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\alpha dn_\beta \wedge dn_\gamma \wedge dn_\delta \tag{12.38}$$

で与えられる。実空間への引き戻しを行うと

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{12\pi^2} \int d^3\mathbf{r} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\alpha \epsilon^{ijk} \frac{\partial n_\beta}{\partial x^i} \frac{\partial n_\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial n_\delta}{\partial x^k} \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^3\mathbf{r} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\alpha \frac{\partial(n_\beta, n_\gamma, n_\delta)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}
 \end{aligned} \tag{12.39}$$

²半径が r の4次元単位球の体積は $\pi^2 r^4/2$ である。