量子力学II　演習問題 1

2018 年 4 月 18 日

1　二準位系

2 次元ヒルベルト空間において $|{\uparrow}\rangle, |{\downarrow}\rangle$ が正規直交系をなすとする。このとき、演算子 $\hat{\sigma_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ をそれぞれ次のように定める。

$$\hat{\sigma_1} := |{\uparrow}\rangle\langle{\downarrow}| + |{\downarrow}\rangle\langle{\uparrow}|,\quad \hat{\sigma_2} := -\mathrm{i}\,|{\uparrow}\rangle\langle{\downarrow}| + \mathrm{i}\,|{\downarrow}\rangle\langle{\uparrow}|,\quad \hat{\sigma_3} := |{\uparrow}\rangle\langle{\uparrow}| - |{\downarrow}\rangle\langle{\downarrow}|$$

(1) $\hat{\sigma_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ がそれぞれエルミートであることを示せ。
(2) $|{\uparrow}\rangle$ と $|{\downarrow}\rangle$ を基底として $\hat{\sigma_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ をそれぞれ行列表示せよ。
(3) $\hat{\sigma_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ のそれぞれについて固有値、固有状態、トレース[1] を求めよ。
(4) 以下の 3 つの等式を示せ。 $(i, j, k = 1, 2, 3)$

$$[\hat{\sigma_i}, \hat{\sigma_j}] = 2\mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\hat{\sigma_k},\qquad \{\hat{\sigma_i}, \hat{\sigma_j}\} = 2\delta_{ij}\hat{I}_2,\qquad \hat{\sigma_i}\hat{\sigma_j} = \delta_{ij}\hat{I}_2 + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\hat{\sigma_k}$$

但し、ϵ_{ijk} はレヴィ・チビタ記号[2] であり、$\hat{I}_2$ は恒等演算子である。
(5) 次の等式を示せ。但し、$\hat{\sigma_0} := \hat{I}_2$ とする。(左辺は Frobenius 内積、又は Hilbert-Schmidt 内積と呼ばれる。)

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{\sigma_i}^\dagger\hat{\sigma_j}\right) = 2\delta_{ij}\quad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

---

[1] 演算子 $\hat{A}$ に対してそのトレースは次のように定義される。$\mathrm{Tr}(\hat{A}) := \sum_i \langle\phi_i|\,\hat{A}\,|\phi_i\rangle$。 但し、$\{|\phi_i\rangle\}$ はヒルベルト空間のある正規直交基底である。つまり、$\hat{A}$ のトレースとは、その行列表示のトレースであり、基底の取り方に依存しない。

[2] $i, j, k = 1, 2, 3$ として、

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ((i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)) \\ -1 & ((i,j,k) = (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(6) 2 次元ヒルベルト空間に作用する任意の演算子[3] $\hat{A}$ は以下のように展開できることを示せ。

$$\hat{A} = \sum_{\mu=0}^{3} d_\mu \hat{\sigma_\mu} \quad (d_\mu \in \mathbb{C})$$

(ヒント：2 次元ヒルベルト空間に作用する演算子全体のなす集合を複素ベクトル空間とみなし、(5) で与えた内積を導入せよ。)

(7) (6) において $\hat{A}$ がエルミートであるとする。このとき、$d_\mu \in \mathbb{R}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ を示せ。

2　シュテルン・ゲルラッハ型測定

(1) 物理量 $\hat{\vec{\mathbf{S}}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ の固有値と固有状態を求めよ。但し、

$$\hat{\vec{\mathbf{S}}} := \frac{\hbar}{2}(\hat{\sigma_1}, \hat{\sigma_2}, \hat{\sigma_3}), \qquad \vec{\mathbf{n}} := (\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta)$$

であり、記号は前問と同じものを意味する。また、$0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ とする。

さて、スピン 1/2 の原子線[4]が次のような一連のシュテルン・ゲルラッハ型測定装置を通過する状況を考える。

(測定 1): $\hat{S_z}$ を測定し、$S_z = \frac{\hbar}{2}$ の原子が選ばれて装置を通過し、$S_z = -\frac{\hbar}{2}$ の原子は除去される。このとき、装置を通過した $S_z = \frac{\hbar}{2}$ の原子線の強度を 1 に規格化する。

(測定 2): 測定 1 の直後に、装置を通過した原子線について $\hat{\vec{\mathbf{S}}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ を測定し、その固有値が正の原子が選ばれて装置を通過し、固有値が負の原子は除去される。

(測定 3): 測定 2 の直後に、装置を通過した原子線について $\hat{S_z}$ を測定し、$S_z = -\frac{\hbar}{2}$ の原子が選ばれて装置を通過し、$S_z = \frac{\hbar}{2}$ の原子は除去される。

(2) 測定 3 の後に装置を通過した $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ の原子線の強度を求めよ。

(3) (2) の強度を最大にするための α, β に関する条件を求めよ。

[3] 量子論においては単に「演算子」というと、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素、すなわち $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線形写像を指すことが多く、ここでもその流儀に従う。この脚注は 4/18 に追加された。

[4] スピン角運動量とは、静止系においても 0 でない値を取りうる角運動量であり、実空間における運動ではなく量子力学的内部自由度 (スピン自由度) に由来する。スピン 1/2 の原子においては、スピン自由度のなすヒルベルト空間は 2 次元であり、$\hat{S}_i$ はスピン角運動量の第 i 成分である。

3　時間発展演算子

時間発展演算子 $\hat{U}(t,t_0)$ は次のように与えられる。$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$

(1) 系のハミルトニアンを $\hat{H}(t)$ とするとき、シュレディンガー方程式に上の関係式を代入することにより、$\hat{U}(t,t_0)$ についての微分方程式を導け。
(2) まずはハミルトニアンが時間に依存しない状況を考える ($\hat{H}(t)=\hat{H}$)。(1) で求めた微分方程式を解いて、$\hat{U}(t,t_0)$ を、$\hat{H}$ を用いて表せ。また、このときに $\hat{U}(t,t_0)$ がユニタリーであることを示せ。

次にハミルトニアンが時間に依存する状況を考える。このときも $\hat{U}(t,t_0)$ がユニタリーであることを示そう。そのためには、$\hat{U}(t,t_0)$ がヒルベルト空間における内積を保存することを示せばよい。

(3) シュレディンガー方程式を用いて次の等式を示せ。

$$\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\phi(t_0)|\psi(t_0)\rangle$$