

## 量子力学Ⅱ 演習問題 3

2018年4月28日

### 1 一次元量子系の定常状態の一般的性質

次のような一次元量子系におけるエネルギー固有値問題について考察する。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

- (1) 定常な束縛状態にはエネルギー固有値の縮退が無いことを示せ。
- (2) ポテンシャルが偶関数 ( $V(-x) = V(x)$ ) のとき、定常な束縛状態の波動関数は偶関数 ( $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ) または奇関数 ( $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ) であることを、(1) で示した事実を用いて示せ。
- (3) ポテンシャルが偶関数のとき、定常状態の波動関数は一般に偶関数または奇関数にとり得ることを示せ。

### 2 一次元井戸型ポテンシャル

- (1) 一次元空間を次のような井戸型ポテンシャルのもとで運動する質量  $m$  の粒子について考察する。

$$V(x) = \begin{cases} -V_0/2a & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

但し、 $V_0, a > 0$  とする。このとき  $a \rightarrow 0$  の極限において定常な束縛状態がただ一つ存在することを示し、その固有エネルギーを求めよ。

- (2) 次に、一次元空間を次のようなデルタ関数型ポテンシャルのもとで運動する質量  $m$  の粒子について考察する。

$$V(x) = -V_0\delta(x)$$

このとき、時間に依存しないシュレディンガー方程式の両辺を微小区間  $[-\epsilon, \epsilon]$  ( $\epsilon > 0$ ) で積分することによって、エネルギー固有関数  $\varphi(x)$  および  $\varphi'(x)$  の  $x = 0$  における接続条件を求めよ。

(3) (2) のようにポテンシャルが与えられた時の定常な束縛状態の固有エネルギーを求め、(1) の結果と比較せよ。

### 3 一次元量子系における定常な束縛状態

次のような一次元シュレディンガー方程式を考える。

$$\hat{H}\varphi_E(x) = E\varphi_E(x)$$

このとき、波動関数が二乗可積分、すなわち

$$\int \varphi_E^*(x)\varphi_E(x) dx < \infty$$

ならば、その固有エネルギーのスペクトラムが離散的であることを示そう。方針としては、固有エネルギー  $E$  の近傍に別の固有エネルギー  $E + \delta E$  が存在することを仮定して、波動関数が二乗可積分ならば  $\delta E = 0$  となることを示す。

(1) 固有エネルギー  $E$  の近傍に別の固有エネルギー  $E + \delta E$  が存在することを仮定し、その固有関数を  $\varphi_{E+\delta E}(x)$  としたとき、 $\varphi_{E+\delta E}(x)$  に関する時間に依存しないシュレディンガー方程式を書き下せ。

(2)  $\varphi_{E+\delta E}(x) = \varphi_E(x) + \delta\varphi_E(x)$  とおいて、(1) で得た方程式の両辺に代入して2次の微小量を落とし、次の等式を導け。

$$\hat{H}\delta\varphi_E(x) = \delta E\varphi_E(x) + E\delta\varphi_E(x)$$

(3) (2) で示した等式を用いて、波動関数が二乗可積分ならば  $\delta E = 0$  であることを示せ。