量子力学 II （上田 正仁） 期末試験

2019 年 7 月 30 日 10:25~12:10（105 分）

全般的な注意

- 持ち込み不可。
- 問題 1 から問題 5 までのすべてに解答せよ。問題に不備があると思われる場合は、問題のどの点をどのように修正、あるいは解釈したかを明記した上で、その修正、解釈のもとで解答せよ。
- 解答用紙は 2 枚である。そのうち、1 枚については表面に問題 1 と問題 2、裏面に問題 3 の解答を記述し、もう 1 枚については表面に問題 4、裏面に問題 5 の解答を記述せよ。
- 試験開始後 30 分以降であれば、答案を提出して退室してよい。

問題 1

この問題によって成績評価が左右されることはありませんが、必ず回答してください。

(1) 演習問題の難易を教えてください。

(a) 難しすぎる (b) やや難しい (c) 適切である (d) やや易しい (e) 易しすぎる

(2) 授業や演習問題について、要望や改善点など、率直な意見を述べてください。

問題 2　シュレーディンガー表示とハイゼンベルグ表示

1 次元自由粒子のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{2.1}$$

のもとでの粒子の存在確率密度の時間発展を、シュレーディンガー表示とハイゼンベルグ表示で考える。時刻 $t = 0$ での位置演算子と運動量演算子をそれぞれ $\hat{x}, \hat{p}$ とし、$\hat{x}$ の固有値 x に属する固有ケットを $|x\rangle$ とする。また、時刻 $t = 0$ での状態を

$$|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x \ |x\rangle \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \right) \tag{2.2}$$

とする。

(1) シュレーディンガー方程式を解き、時刻 t における運動量表示の波動関数 $\langle p|\psi(t)\rangle$ を求めよ。

(2) シュレーディンガー方程式を解いて得た状態 $|\psi(t)\rangle$ を用いて、時刻 t において粒子が位置 λ に存在する確率密度 $\mathcal{P}(\lambda, t)$ を計算せよ。

(3) 次に、系の運動をハイゼンベルグ表示で考える。ハイゼンベルグ方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{x}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{x}(t)], \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{p}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}(t)] \tag{2.3}$$

を解き、時刻 t における位置演算子 $\hat{x}(t)$ と運動量演算子 $\hat{p}(t)$ を $\hat{x}, \hat{p}$ を用いて表せ。また、$\hat{x}(t)\,|\lambda, t\rangle = \lambda\,|\lambda, t\rangle$ を満たす、$\hat{x}(t)$ の固有ケット $|\lambda, t\rangle$ を $\{\,|x\rangle\}$ の線形結合で表せ。

(4) ハイゼンベルグ表示においては系の状態 $|\psi\rangle$ は変化しない。状態 $|\psi\rangle$ と位置演算子 $\hat{x}(t)$ の固有ケット $|\lambda, t\rangle$ を用いて、時刻 t において粒子が位置 λ に存在する確率密度 $\mathcal{P}(\lambda, t)$ を計算せよ。

問題 3　ほぼ縮退している場合の摂動論

二準位系のハミルトニアン行列は

$$H = \begin{pmatrix} E_+^{(0)} & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta^* & E_-^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0 \tag{3.1}$$

と表すことができる。ここで $E_+^{(0)} \geq E_-^{(0)}$ とする。

(1) このハミルトニアンの固有値 $E_\pm$ $(E_+ \geq E_-)$ と固有状態 $|E_\pm\rangle$ を厳密に求めよ。

(2) まず、摂動の大きさに対して、無摂動固有値に縮退がないと見なせる場合 $\lambda|\Delta| << |E_+^{(0)} - E_-^{(0)}|$ を考える。エネルギー固有値とエネルギー固有状態に対する摂動の 1 次の補正 $E_\pm^{(1)}$, $|E_\pm^{(1)}\rangle$ を求めよ。

(3) エネルギー固有値の 2 次の補正 $E_\pm^{(2)}$ を計算せよ。

(4) 次に、摂動の大きさに対して、無摂動固有値がほとんど縮退していると見なせる場合 $|E_+^{(0)} - E_-^{(0)}| << \lambda|\Delta|$ を考える。このとき、縮退のない場合の摂動論は適切ではないことを説明せよ。

問題 4　調和振動子の WKB 近似

1 次元ポテンシャル $V(x)$ の下で運動している質量 m の粒子の運動を WKB 近似を用いて考える。座標表示を取り、ハミルトニアンの固有値方程式を

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi_E(x) = E\psi_E(x) \tag{4.1}$$

とする。

(1) $\psi_E(x) = e^{i\frac{S_E(x)}{\hbar}}$ としたとき、(4.1) から $S_E(x)$ の満たすべき微分方程式を求めよ。

(2) 前問で導入した関数 $S_E(x)$ を $\hbar$ の冪で

$$S_E(x) = S_E^{(0)} + \frac{\hbar}{i}S_E^{(1)} + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_E^{(2)} + \ldots \tag{4.2}$$

と展開する。このとき、$S_E^{(0)}$ と $S_E^{(1)}$ の満たすべき微分方程式を導け。また、方程式を解いて、第 0 近似 $S_E(x) = S_E^{(0)}$ が成り立つためにポテンシャル $V(x)$ が満たすべき不等式を $p(x) := \sqrt{2m(E - V(x))}$ を用いて表せ。

以下では、具体的に調和振動子 $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ を考える。$V(a_\pm) = E$ となる転回点 $a_\pm$ は $a_\pm = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ である。転回点付近において、$V(x) = E \pm \sqrt{2m\omega^2 E}\,(x - a_\pm)$ と線形近似できる。

(3) 条件 $\lim_{x\to\pm\infty}\psi_E(x) = 0$ の下で、領域 $x < a_-$、$a_- < x < a_+$、$a_+ < x$ における方程式 (4.1) の一般解 ψ_E を (4.2) の 1 次の範囲でそれぞれ求めよ。ここで関数

$$\eta(x) := \int_{-1}^{x} \mathrm{d}z\,\sqrt{1 - z^2}, \quad \xi_+(x) := \int_{+1}^{x} \mathrm{d}z\,\sqrt{z^2 - 1}, \quad \xi_-(x) := \int_{x}^{-1} \mathrm{d}z\,\sqrt{z^2 - 1} \tag{4.3}$$

を用いて良い。領域間の接続はまだ行わなくて良い。

(4) 転回点 a_+ 周りでポテンシャル $V(x)$ を線形近似する。得られた固有関数を適切な定数 $r > 0$ について $a_+ - x = re^{i\theta}$ と解析接続し、$\theta = 0$ から $\theta = \pm\pi$ と変化させることで領域 $x > a_+$ と領域 $a_- < x < a_+$ における固有関数を接続せよ。（r を求める必要はない。）

(5) ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件を導き、エネルギースペクトル E_n を求めよ。

問題 5　時間に依存する摂動論

非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_0$ に、時間に依存する摂動 $\hat{V}(t) = \hat{V}e^{-(t/\tau)^2}$ が加わった系

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \tag{5.1}$$

を考える。$\hat{H}_0$ のエネルギー固有値と固有状態を $\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$ とする。

(1) 一般的な状態 $|\psi(t)\rangle$ をエネルギー固有状態 $e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle$ を用いて

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle \tag{5.2}$$

と展開する。このとき、係数 $c_n(t)$ が満たすべき微分方程式を $V_{nm} := \langle n|\hat{V}|m\rangle$ を用いて表せ。

(2) 時刻 t_0 に $|\psi(t_0)\rangle = |n\rangle$ であったとする。エネルギー固有状態 $|m\rangle$ の係数を、$c_m(t) = c_m^{(0)}(t) + c_m^{(1)}(t) + \ldots$ と摂動展開して、$c_m(t)$ を摂動の 1 次までで求めよ。解答は行列要素 V_{jk} および $t_0, \omega_{jk} = (E_j - E_k)/\hbar$ を用いて表せ。解答中に定積分が含まれていても良い。

(3) 初期条件 $|\psi(t_0)\rangle = |n\rangle$ を保ったまま $t_0 \to -\infty$ とする。このとき、時刻 $t = +\infty$ において系が状態 $|m\rangle$ $(m \neq n)$ に見出される確率を、摂動の 1 次までで求めよ。必要であれば $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, e^{-z^2} = \sqrt{\pi}$ を用いよ。

以下では具体的に

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \quad \hat{V}(t) = q(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}, \quad q \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad \hat{a}|0\rangle = 0, \quad |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}(\hat{a}^\dagger)^m |0\rangle, \quad E_m = \hbar\omega\left(m + \frac{1}{2}\right) \tag{5.4}$$

の場合を考える。

(4) 時刻 $t = -\infty$ に状態 $|n\rangle$ にあった系が、時刻 $t = +\infty$ において状態 $|m\rangle$ に見出される確率振幅 $c_m(\infty)$ が 0 でなくなるのは、摂動の何次の項まで取り入れたときか。

(5) 時刻 $t = -\infty$ に基底状態 $|0\rangle$ にあった系が、時刻 $t = +\infty$ において状態 $|m\rangle$ に見出される確率振幅 $c_m(+\infty)$ の、0 でない最低次の補正を求めよ。