量子力学 **II**（上田 正仁） 中間試験

2019 年 6 月 18 日 10:25~12:10（105 分）

全般的な注意

- 持ち込み不可。
- 問題 1 から問題 5 までのすべてに解答せよ。問題に不備があると思われる場合は、問題のどの点をどのように修正、あるいは解釈したかを明記した上で、その修正、解釈のもとで解答せよ。
- 解答用紙は 2 枚である。そのうち、1 枚については表面に問題 1 と問題 2、裏面に問題 3 の解答を記述し、もう 1 枚については表面に問題 4、裏面に問題 5 の解答を記述せよ。
- 試験開始後 30 分以降であれば、答案を提出して退室してよい。

問題 1

この問題によって成績評価が左右されることはありませんが、必ず回答してください。

(1) 演習問題の難易を教えてください。

(a) 難しすぎる (b) やや難しい (c) 適切である (d) やや易しい (e) 易しすぎる

(2) 授業や演習問題について、要望や改善点など、率直な意見を述べてください。

問題 2　トンネル効果・量子反射

1 次元空間をポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +V_0 & (0 < x < L \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{ それ以外 }) \end{cases} \tag{2.1}$$

の下で運動する質量 m の粒子を考える。ここで $V_0 > 0$ とする。

(1) エネルギー固有値 E に対するシュレーディンガー方程式の解を

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A_1 e^{+ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} & (x < 0 \text{ のとき }) \\ A_2 e^{+ik_0 x} + B_2 e^{-ik_0 x} & (0 \leq x \leq L \text{ のとき }) \\ A_3 e^{+ik_1 x} + B_3 e^{-ik_1 x} & (x \geq L \text{ のとき }) \end{cases} \tag{2.2}$$

と書いたとき、$x = 0$ と $x = L$ における接続条件から $A_1, B_1, A_3 e^{+ik_1 L}, B_3 e^{-ik_1 L}$ を A_2, B_2 の線型結合で表せ。

(2) 以下では $x = -\infty$ から x の正方向に粒子を入射した場合を考え、$A_1 = 1, B_3 = 0$ とする。このとき、ある複素数 F をもちいて

$$A_2 = (k_0 + k_1) e^{-ik_0 L} \cdot F, \quad B_2 = (k_0 - k_1) e^{+ik_0 L} \cdot F \tag{2.3}$$

と書けることを示し、F を求めよ。

(3) $E < V_0$ の場合を考え $\kappa := |k_0|, k_0 = i\kappa$ とする。粒子の透過率 $T = |A_3|^2$ と反射率 $R = |B_1|^2$ を求めよ。また、$T \neq 0$ かつ $T + R = 1$ であることを確認せよ。

(4) 次に、$E > V_0$ の場合を考える。このときの粒子の透過率 $T = |A_3|^2$ と反射率 $R = |B_1|^2$ を求めよ。$R = 0$ となるのはどのようなときか。

問題 3　最小不確定性状態

(1) ケット $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ の線形結合 $|\psi\rangle + \lambda |\phi\rangle$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ を考えることにより、シュワルツの不等式

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle \langle\phi|\phi\rangle \tag{3.1}$$

を導け。等号成立条件は何か。

(2) シュワルツの不等式を用いて、$\hat{x}$ と $\hat{p}$ の不確定性関係

$$\left\langle\psi\middle|(\Delta\hat{x})^2\middle|\psi\right\rangle\left\langle\psi\middle|(\Delta\hat{p})^2\middle|\psi\right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{3.2}$$

を示せ。ここで、$\Delta\hat{x} := \hat{x} - \left\langle\psi\middle|\hat{x}\middle|\psi\right\rangle,\quad \Delta\hat{p} := \hat{p} - \left\langle\psi\middle|\hat{p}\middle|\psi\right\rangle$ である。また、状態 $\left|\psi\right\rangle$ は規格化されているものとする。

(3) 状態 $\left|\psi\right\rangle$ が位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ に対して最小不確定性関係

$$\left\langle\psi\middle|(\Delta\hat{x})^2\middle|\psi\right\rangle\left\langle\psi\middle|(\Delta\hat{p})^2\middle|\psi\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \tag{3.3}$$

を満たすための必要十分条件を述べよ。

(4) 上記の条件から、

$$x_0 = \left\langle\psi\middle|\hat{x}\middle|\psi\right\rangle,\quad p_0 = \left\langle\psi\middle|\hat{p}\middle|\psi\right\rangle,\quad \left\langle\psi\middle|(\Delta\hat{x})^2\middle|\psi\right\rangle = \sigma^2 \tag{3.4}$$

および最小不確定性関係 (3.3) を満たす状態 $|\psi\rangle$ の波動関数 $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ を求めよ。

問題 4　保存量と対称性変換

(1) 任意の線形演算子 $\hat{R}$ は、エルミート演算子 $\hat{R}_1, \hat{R}_2$ を用いて $\hat{R} = \hat{R}_1 + i\hat{R}_2$ と書けることを示せ。また、エルミート演算子 $\hat{H}$ に対し $\left[\hat{H}, \hat{R}\right] = 0$ ならば $\left[\hat{H}, \hat{R}_1\right] = \left[\hat{H}, \hat{R}_2\right] = 0$ を示せ。

(2) ユニタリ演算子 $\hat{U}$ に対して、$\hat{P} := -i\log\hat{U}$ が定義できエルミート演算子になることを示せ。つまり、$\hat{U} = e^{i\hat{P}}$ をみたすエルミート演算子 $\hat{P}$ を求めよ。

(3) エルミート演算子 $\hat{P}$ に対して $\hat{T}(\lambda) := e^{i\hat{P}\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ はユニタリ演算子だから、ユニタリ演算子とエルミート演算子は 1 対 1 に対応することがわかる[*1]。エルミートなハミルトニアン $\hat{H}$ に対し

$$\left[\hat{H}, \hat{P}\right] = 0 \iff \left[\hat{H}, \hat{T}(\lambda)\right] = 0,\quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

を示せ。

[*1] 厳密には 2π の整数倍をエルミート演算子に加える自由度が残されている。

問題 5　磁場中の水素原子

磁場中にある水素原子を考える。このとき、陽子や電子の持つスピンと磁場との相互作用により、水素原子のエネルギースペクトルはスピン状態に依存して変化する。陽子のスピン演算子を $\hat{I}_i$ $(i = x, y, z)$、電子のスピン演算子を $\hat{S}_i$ $(i = x, y, z)$ とする。また、陽子と電子のスピンの大きさは 1/2 である。$\hat{I}_z$ と $\hat{S}_z$ の同時固有状態を $\{|\pm, \pm\rangle\}$ とし、

$$\hat{I}_z |\pm, +\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |\pm, +\rangle, \quad \hat{S}_z |+, \pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |+, \pm\rangle \tag{5.1}$$

などとする。外部磁場 $\vec{B}$ 中にある水素原子のスピン部分のハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\left(-g_e \mu_B \hat{\boldsymbol{S}} + g_p \mu_N \hat{\boldsymbol{I}}\right) \cdot \vec{B} + \alpha \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}} \tag{5.2}$$

である。ここで、μ_B, μ_N はそれぞれボーア磁子、核磁子であり、g_e, g_p はランデの g 因子と呼ばれ相対論的効果による補正を表す。また、α は超微細構造定数である。

以下では、磁場は z 軸に沿ってかけられているとし、$\vec{B} = B\vec{e}_z$ とする。

(1) 合成スピン演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} := \hat{\boldsymbol{I}} + \hat{\boldsymbol{S}}$ とする。このとき、$\hat{J}^2$ と $\hat{J}_z$ の同時固有状態 $\left|j, m\right\rangle$ を全て求め、$\{|\pm, \pm\rangle\}$ の線型結合で表せ。

(2) $c_1\hat{\boldsymbol{I}} + c_2\hat{\boldsymbol{S}}$ で表される量を考える。このとき、合成スピンの固有状態 $\left\{|j, m\rangle\right\}$ に対する作用

$$\left(c_1\hat{\boldsymbol{I}} + c_2\hat{\boldsymbol{S}}\right) |j, m\rangle = \sum_{j'm'} c_{j'm'} \left|j', m'\right\rangle \tag{5.3}$$

を全て求めよ。

(3) ハミルトニアン $\hat{H}$ のエネルギー固有値を求めよ。また、得られたエネルギー固有値を磁場の大きさ B の関数として、その概形を図示せよ。ここで、$g_e\mu_B >> g_p\mu_N$ である。

(4) それぞれのエネルギー固有値に対する固有状態を求めよ。