量子力学 II 演習問題 1

2019 年 6 月 19 日

1 運動量演算子の座標表示

位置演算子 $\hat{x}$ を、ヒルベルト空間の"基底"$|x\rangle$ に対して

$$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle \tag{1.1}$$

と作用する線形演算子として定義し、運動量演算子 $\hat{p}$ を交換関係

$$\left[\hat{x}, \hat{p}\right] = i\hbar \tag{1.2}$$

を満たす線形演算子として定義する。

1.1

運動量演算子に対するこの定義は $\hat{p} \longrightarrow \hat{p} + \alpha(\hat{x})$ の自由度を除いて well-defined であることを示せ。すなわち、線形演算子 $\hat{p}$ と $\hat{p}'$ が

$$\left[\hat{x}, \hat{p}\right] = i\hbar, \quad \left[\hat{x}, \hat{p}'\right] = i\hbar \tag{1.3}$$

を満たすならば、ある複素数値関数 $\alpha(x)$ が存在して $\hat{p}' = \hat{p} + \alpha(\hat{x})$ となることを示せ。ここで、位置演算子 $\hat{x}$ に縮退はないものとする。

1.2

$\left[\hat{x}, \hat{p}\right] = i\hbar$ を満たすエルミート演算子 $\hat{p}$ は、存在すれば実関数 $\alpha(x)$ の違いを除いてただ一つであることを示せ。

1.3

上記の一意性をもちいて、$\left[\hat{x},\hat{p}\right] = i\hbar$ を満たすエルミート演算子 $\hat{p}$ の座標表示の波動函数 $\psi(x) \coloneqq \left\langle x \middle| \psi \right\rangle$ に対する作用はある実関数 $\alpha(x)$ をもちいて、

$$\hat{p}\psi(x) \coloneqq \left\langle x \middle| \hat{p} \middle| \psi \right\rangle = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x)\right]\psi(x) \tag{1.4}$$

と書けることを示せ。[*1]

ここで、演算子 $\hat{p}_0$ を $\left\langle x \middle| \hat{p}_0 \middle| \psi \right\rangle \coloneqq -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$ とし、$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int^x \alpha(x')\,\mathrm{d}x'\right)$ とすると

$$\hat{p} = U\hat{p}_0U^\dagger \tag{1.5}$$

となっている。

一般に、交換関係 $\left[\hat{x},\hat{p}\right] = i\hbar$ を満たす演算子の組 $\left(\hat{x}_1,\hat{p}_1\right)$ と $\left(\hat{x}_2,\hat{p}_2\right)$ はあるユニタリ演算子 $\hat{U}$ を用いて

$$\hat{x}_2 = U\hat{x}_1U^\dagger, \quad \hat{p}_2 = U\hat{p}_1U^\dagger \tag{1.6}$$

で結びつけられ、シュレーディンガー描像やハイゼンベルグ描像、相互作用描像など量子力学の異なる描像を与える。（フォン・ノイマンの一意性定理）

2　射影演算子

線形演算子 $\hat{P}$ が冪等関係 $\hat{P}^2 = \hat{P}$ を満たすとする。

2.1

冪等関係を満たす線形演算子 $\hat{P}$ はすべてエルミートか？エルミートであるならばそれを示し、そうでないならば反例を挙げよ。[*2]

2.2

$\hat{P}$ がエルミートならば、正規直交系 $\left\{\left|\psi_i\right\rangle\right\}_i$ が存在して $\hat{P} = \sum_i \left|\psi_i\middle\rangle\middle\langle\psi_i\right|$ と書けることを示せ[*3]。

[*1] ヒント：$\left\langle x \middle| \hat{p}_0 \middle| \psi \right\rangle \coloneqq -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$ となる $\hat{p}_0$ が交換関係 $\left[\hat{x},\hat{p}\right] = i\hbar$ を満たす演算子の一例であることを用いよ。
[*2] ヒント：2 準位系を考え、2×2 行列 P が $P^2 = P$ を満たす条件を考えよ。
[*3] ヒント：$\hat{P}$ はエルミートだから対角化できる。

3　複製不可能定理

3.1

任意の状態 $\left|\psi\right\rangle \in \mathcal{H}$ に対して、$\hat{U}\left|\psi\right\rangle = \left|\psi\right\rangle \otimes \left|\psi\right\rangle$ となるような、線形演算子 $\hat{U}$ が存在しないことを示せ [*4]。量子力学では可能な操作は線形演算子で表せることを仮定しているから、このことは任意の量子状態を複製できるような操作が存在しないことを表している。

3.2

任意の状態 $\left|\psi\right\rangle \in \mathcal{H}$ に対して、$U\left|\psi\right\rangle = \left|\psi\right\rangle \otimes \left|\psi\right\rangle$ となるような、内積を保つ演算子 U（線形とは限らない）が存在しないことを示せ。[*5] ここで、演算子 U が内積を保つとは、任意の状態 $\left|\psi\right\rangle, \left|\varphi\right\rangle$ について、

$$\left\langle U\varphi \middle| U\psi \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \psi \right\rangle \tag{3.1}$$

が成り立つことを言う。[*6]

3.3

では、ある特定の物理的に異なる 2 つの状態 $\left|\psi\right\rangle, \left|\phi\right\rangle$ に対して

$$U\left|\psi\right\rangle = \left|\psi\right\rangle \otimes \left|\psi\right\rangle, \quad U\left|\phi\right\rangle = \left|\phi\right\rangle \otimes \left|\phi\right\rangle \tag{3.2}$$

を満たす線形かつ内積を保つ演算子 U が存在するために、$\left|\psi\right\rangle, \left|\phi\right\rangle$ が満たすべき必要十分条件は何か。[*7]

[*4] ヒント：$\left|\psi\right\rangle = \alpha\left|\psi_1\right\rangle + \beta\left|\psi_2\right\rangle$ を $\hat{U}$ で複製することを考えよ。

[*5] ヒント：任意の状態 $\left|\psi\right\rangle, \left|\phi\right\rangle$ について $\left|\left\langle \psi \middle| \phi \right\rangle\right| < 1$ を用いよ。

[*6] 量子力学では、可能な操作を表す演算子は内積を保たなくても良いため、この小問からは複製操作が存在しないことは言えない。

[*7] ヒント：十分条件を示すには、ある特定の基底 $\{|n\rangle\}_n$ に対して $U|n\rangle$ をすべての n について定めることにより U を構成すれば良い。