量子力学 II 演習問題 10

2019 年 6 月 24 日

1　ほぼ縮退している場合の摂動論

二準位系のハミルトニアン行列は

$$H = \begin{pmatrix} E_1^0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta^* & E_2^0 \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0 \tag{1.1}$$

と表すことができる。

1.1

このハミルトニアンの固有値と固有状態を厳密に求めよ。

1.2

まず、摂動の大きさに対して、無摂動固有値に縮退がないと見なせる場合 $\lambda|\Delta| << \left|E_1^0 - E_2^0\right|$ を考える。時間を含まず縮退がない場合の摂動論を用いて、エネルギー固有状態とエネルギー固有値を求めよ。エネルギー固有状態については摂動の 1 次の補正まで、エネルギー固有値については 2 次の補正まで計算せよ。得られた結果を厳密解と比較せよ。

1.3

次に、摂動の大きさに対して、無摂動固有値がほとんど縮退していると見なせる場合 $\left|E_1^0 - E_2^0\right| << \lambda|\Delta|$ を考える。このとき、縮退のない場合の摂動論は適切ではないことを

説明せよ。また、縮退のある場合の摂動論が適用できることを、ハミルトニアンを

$$H = \begin{pmatrix} E^0 & 0 \\ 0 & E^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta^* & V_{22} \end{pmatrix}, \quad |V_{11}|, |V_{22}| = \mathcal{O}(\lambda) \tag{1.2}$$

と書き直すことで示せ。

2　時間に依存する摂動

1 次元調和振動子に、時刻 $t > 0$ において力 $F(t) = F_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ $(\tau > 0)$ を加えた場合を考える。$t < 0$ では $F(t) = 0$ とする。この場合のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \hat{V}(t), \quad \hat{V}(t) := -F_0 \hat{x} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.1}$$

である。消滅演算子 $\hat{a}$ を

$$\hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}) \tag{2.2}$$

で定義すると、$F_0 = 0$ の場合の非摂動ハミルトニアンの固有状態は $|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}(\hat{a}^\dagger)^m |0\rangle$ となる。ここで $|0\rangle$ は $\hat{a}|0\rangle = 0$ により定義される。また、$\hat{a}^\dagger$ を生成演算子という。

2.1

時刻 t における状態 $\left|\psi(t)\right\rangle$ を非摂動エネルギー固有状態 $e^{-i\frac{E_m t}{\hbar}} |m\rangle$ で展開して、

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) e^{-i\frac{E_m t}{\hbar}} |m\rangle \tag{2.3}$$

と書く。このとき、Schorodinger 方程式から $c_m(t)$ の満たすべき微分方程式を導け。この段階では式の中に $V_{mm'}(t) = \langle m|\hat{V}(t)|m'\rangle$ が含まれていても良い。

2.2

次に、$c_m(t)$ を $\hat{V}$ に関するべきで展開して

$$c_m(t) = c_m^{(0)} + c_m^{(1)} + c_m^{(2)} + \ldots \tag{2.4}$$

とする。摂動の 1 次まで計算することにして、前問で求めた微分方程式から $c_m^{(0)}, c_m^{(1)}$ の満たすべき微分方程式を導け。ここでも $V_{mm'}(t)$ を用いて良い。

2.3

時刻 $t < 0$ で基底状態にあった系が、時刻 $t \to \infty$ で第 n 励起状態に見出される確率を 1 次の摂動の範囲内で求めよ。[*1]

2.4

時刻 $t < 0$ で基底状態にあった系が、時刻 $t \to \infty$ で第 n 励起状態に見出される確率が 0 で無くなるのは、摂動の何次の項まで取り入れたときか？

次に、力積を保ったまま $\tau \to 0$ とした場合を考える。このときのハミルトニアンを

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \hat{V}(t), \quad \hat{V}(t) := -P_0 \hat{x} \delta(t) \tag{2.5}$$

とする。

2.5

十分小さい正の数 ϵ に対して、Schrodinger 方程式を時刻 $t = -\epsilon$ から $t = +\epsilon$ まで積分することにより、時刻 $t = \epsilon$ における系の状態 $\left|\psi(\epsilon)\right\rangle$ が

$$\left|\psi(\epsilon)\right\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \hat{f}(\hat{x}, t)\,\mathrm{d}t\right]\left|\psi(-\epsilon)\right\rangle \tag{2.6}$$

と表されることを示せ。

2.6

演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ の交換関係が $[\hat{A}, \hat{B}] \in \mathbb{C}$ となるときに成り立つ式

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \tag{2.7}$$

を用いて、時刻 $t = -\epsilon$ において基底状態 $|0\rangle$ にあった系の時刻 $t = \epsilon$ における状態を求めよ。この結果と、$F_0\tau = P_0$ を保ちながら $\tau \to 0$ とした場合の問題 1.3 の結果と比較せよ。

[*1] ヒント：$V_{mm'}(t)$ を具体的に計算するには、$\hat{x}$ を (2.2) で定義した消滅演算子 $\hat{a}$ と生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ で表してみよ。