量子力学 II 演習問題 11

2019 年 7 月 25 日

1　相互作用表示

二準位系の無摂動ハミルトニアンが

$$H = \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 \\ 0 & E_2^0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

で与えられる系に、時間に依存する摂動

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda e^{+i\omega t} \\ \lambda e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

が加わった場合を考える。

1.1

$t = 0$ に系が状態

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

にあったとする。その後の時刻 t における系の状態を相互作用表示を用いて、

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) e^{-i\frac{E_1^0}{\hbar}t} \\ c_2(t) e^{-i\frac{E_2^0}{\hbar}t} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

と表したとき、$c_1(t), c_2(t)$ の満たすべき微分方程式を求め、厳密解を求めよ。$c_i(t) = e^{i\theta_i t}$ とおくと良い。

1.2

無摂動エネルギー固有状態の係数 $c_1(t), c_2(t)$ を、λ の冪で

$$c_i(t) = c_i^{(0)}(t) + c_i^{(1)}(t) + \ldots, \quad (i = 1, 2) \tag{1.5}$$

と展開する。$\pm\hbar\omega$ が $\left|E_1^0 - E_2^0\right|$ に近くない場合に、時間に依存する摂動論を用いて $c_i^{(0)}(t), c_i^{(1)}(t)$ $(i = 1, 2)$ を計算せよ。さらに、系が時刻 $t > 0$ において状態 $(0, 1)^T$ に見出される確率を摂動の 1 次の範囲内で導け。得られた結果を厳密解と比較せよ。

1.3

$E_2^0 - E_1^0 = \hbar\omega$ 場合に、系が時刻 $t > 0$ において状態 $(0, 1)^T$ に見出される確率を、$c_i^{(0)}, c_i^{(1)}, c_i^{(2)}$ $(i = 1, 2)$ を順次計算することにより求めよ。得られた結果を厳密解と比較せよ。

2　重力ポテンシャル中での質点の運動

重力ポテンシャル

$$V_0(x) = \begin{cases} mgx & (x > 0) \\ \infty & (x < 0) \end{cases} \tag{2.1}$$

の中で弾んでいる質点の運動を WKB 近似を用いて考える。ここで $x = 0$ を地面にとった。質点のエネルギーを E とすると $V(x) = E$ となる点 x は

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{E}{mg} \tag{2.2}$$

であるが、$x < x_1$ の領域で波動関数は厳密に 0 でなければならないから、波動関数が転回点を越えて滲み出すことを前提とした WKB 近似の接続法は使えない。そこで、ポテンシャルを修正して

$$V(x) = mg|x|, \quad (-\infty < x < \infty), \quad x_1 = -\frac{E}{mg}, \quad x_2 = \frac{E}{mg} \tag{2.3}$$

とし、このポテンシャルに対する奇関数の固有関数のみを考えることにする。1 次元常微分方程式の解の一意性から、この方法で $V(x)$ を用いて求めたエネルギースペクトルは $V_0(x)$ を用いて求めたものと一致する。

2.1

エネルギー固有値 E の波動関数を u_E とする。u_E に対するハミルトニアンの固有値方程式が、

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_E}{\mathrm{d}y^2} - 2(y-\epsilon)u_E = 0 \ \ (y > 0 \text{ のとき}), \quad y \coloneqq \frac{x}{x_0}, \quad \epsilon \coloneqq \frac{E}{E_0} \tag{2.4}$$

と書き直せることを示し、x_0 と E_0 を求めよ。さらに変数変換を施して、上記の方程式を適切な変数の範囲内で

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_E}{\mathrm{d}z^2} - z u_E = 0 \tag{2.5}$$

と書き直せ。この方程式の解のうち $z \to \infty$ で 0 になるものは Airy 関数と呼ばれる。$u_E(x)$ が奇関数であるという条件 $u_E(x=0)=0$ から、この問題で求めるエネルギースペクトルが得られる。

2.2

次に、WKB 近似を用いて考える。ポテンシャル $V(x)$ に対する固有関数 $\psi_E(x)$ を

$$\psi_E(x) = e^{i\frac{S(x)}{\hbar}}, \quad S = S^{(0)} + \frac{\hbar}{i}S^{(1)} + \ldots \tag{2.6}$$

と表したとき、ハミルトニアンの固有値方程式から $S^{(0)}$ と $S^{(1)}$ の満たすべき微分方程式を求めよ。

2.3

前問で求めた微分方程式を解き、領域 $x < x_1$、$x_1 < x < x_2$、$x_2 < x$ のそれぞれにおける波動関数 ψ_E を WKB 近似の範囲内で求めよ。領域間の接続はまだ行わなくて良い。

2.4

隣接する領域間の接続条件を求め、$x_1 < x < x_2$ における波動関数の一価性からエネルギー固有値 E の量子化条件を導け。得られた結果をいくつかのエネルギー固有値について厳密解から得られる値と比較せよ。このとき ψ_E は奇関数であることに注意せよ。