量子力学 II 演習問題 2

2019 年 6 月 19 日

1　シュレーディンガー表示とハイゼンベルグ表示

1 次元自由粒子のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{1.1}$$

のもとでの粒子の存在確率密度の時間発展を、シュレーディンガー表示とハイゼンベルグ表示で考える。時刻 $t = 0$ での位置演算子と運動量演算子をそれぞれ $\hat{x}, \hat{p}$ とし、$\hat{x}$ の固有値 x に属する固有ケットを $|x\rangle$ とする。また、時刻 $t = 0$ での状態を

$$\left|\psi\right\rangle = \int \mathrm{d}x \, |x\rangle \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \right) \tag{1.2}$$

とする。

1.1

この系の運動をまずはシュレーディンガー表示で考える。$\left[\hat{H}, \hat{p}\right] = 0$ であるから、時間発展を扱うには状態 $\left|\psi\right\rangle$ を運動量基底で表すと良い。時刻 $t = 0$ における状態の運動量表示の波動関数 $\left\langle p \middle| \psi \right\rangle$ を求めよ。

1.2

シュレーディンガー方程式を解き、時刻 t における運動量表示の波動関数 $\left\langle p \middle| \psi(t) \right\rangle$ を求めよ。

1.3

シュレーディンガー方程式を解いて得た状態 $\left|\psi(t)\right\rangle$ を用いて、時刻 t において粒子が位置 λ に存在する確率密度 $\mathcal{P}(\lambda, t)$ を計算せよ。

1.4

次に、系の運動をハイゼンベルグ表示で考える。ハイゼンベルグ方程式を解き、時刻 t における位置演算子 $\hat{x}(t)$ と運動量演算子 $\hat{p}(t)$ を求めよ。また、$\hat{x}(t)\left|\lambda, t\right\rangle = \lambda\left|\lambda, t\right\rangle$ を満たす、$\hat{x}(t)$ の固有ケット $\left|\lambda, t\right\rangle$ を $\{\left|x\right\rangle\}$ の線形結合で表せ。

1.5

ハイゼンベルグ表示においては系の状態 $\left|\psi\right\rangle$ は変化しない。状態 $\left|\psi\right\rangle$ と位置演算子 $\hat{x}(t)$ の固有ケット $\left|\lambda, t\right\rangle$ を用いて、時刻 t において粒子が位置 λ に存在する確率密度 $\mathcal{P}(\lambda, t)$ を計算せよ。

このように、シュレーディンガー表示を用いてもハイゼンベルグ表示を用いても、量子力学の最も基本的な予言内容である物理量の観測値の確率分布について全く同じ結果が得られる。

2 最小不確定性状態

2.1

ケット $\left|\psi\right\rangle, \left|\phi\right\rangle$ の線形結合 $\left|\psi\right\rangle + \lambda\left|\phi\right\rangle$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ を考えることにより、シュワルツの不等式

$$\left|\left\langle\psi\middle|\phi\right\rangle\right|^2 \leq \left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle\left\langle\phi\middle|\phi\right\rangle \tag{2.1}$$

を導け。等号成立条件は何か。

2.2

シュワルツの不等式を用いて、$\hat{x}$ と $\hat{p}$ の不確定性関係

$$\left\langle \psi \middle| (\Delta \hat{x})^2 \middle| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| (\Delta \hat{p})^2 \middle| \psi \right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.2}$$

を示せ。ここで、$\Delta \hat{x} \coloneqq \hat{x} - \left\langle \psi \middle| \hat{x} \middle| \psi \right\rangle, \quad \Delta \hat{p} \coloneqq \hat{p} - \left\langle \psi \middle| \hat{p} \middle| \psi \right\rangle$ である。

2.3

状態 $|\psi\rangle$ が位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ に対して最小不確定性関係

$$\left\langle \psi \middle| (\Delta \hat{x})^2 \middle| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| (\Delta \hat{p})^2 \middle| \psi \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.3}$$

を満たすための必要十分条件を述べよ。*1 *2

2.4

上記の条件から、

$$x_0 = \left\langle \psi \middle| \hat{x} \middle| \psi \right\rangle, \quad p_0 = \left\langle \psi \middle| \hat{p} \middle| \psi \right\rangle, \quad \left\langle \psi \middle| (\Delta \hat{x})^2 \middle| \psi \right\rangle = \sigma^2 \tag{2.4}$$

および最小不確定性関係 (2.3) を満たす状態 $\left|\psi\right\rangle$ の波動関数 $\psi(x) = \left\langle x \middle| \psi \right\rangle$ を求めよ。

*1 ヒント：位置の期待値と運動量の期待値が同じでも、最小不確定性関係を満たす状態と満たさない状態の両方が存在する。したがって、求めるべき条件は $|\psi\rangle$ を含まなければばならない。

*2 ヒント：特に、演算子として $\{\Delta \hat{x}, \Delta \hat{y}\} \neq \hat{0}$ である。