量子力学 II 演習問題 5

2019 年 6 月 19 日

1　Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$e^{i\hat{G}x}\hat{A}e^{-i\hat{G}x}$ を x で微分した式を、0 から λ まで積分することにより、Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$e^{i\hat{G}\lambda}\hat{A}e^{-i\hat{G}\lambda} = \hat{A} + i\lambda[\hat{G},\hat{A}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[\hat{G},[\hat{G},\hat{A}]] + \dots \tag{1.1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^n}{n!}[\underbrace{\hat{G},[\hat{G},[\dots,[\hat{G}}_{n\text{ 個}},\hat{A}]]]] \tag{1.2}$$

を導け。[*1]

2　Schwinger-boson 表示とウィグナーの公式

角運動量代数 $\left[\hat{J}_i,\hat{J}_j\right] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{J}_k$ を調和振動子で用いた生成消滅演算子 $\hat{a},\hat{a}^\dagger$ のなす代数 $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1$ には密接な関係がある。

2 つの独立な消滅演算子 $\hat{a},\hat{b}$ を考え、これらは交換関係

$$\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = \left[\hat{b},\hat{b}^\dagger\right] = 1, \quad \left[\hat{a},\hat{b}\right] = \left[\hat{a},\hat{b}^\dagger\right] = 0. \tag{2.1}$$

を満たすとする。さらに、演算子

$$\hat{S}_+ := \hbar\hat{a}^\dagger\hat{b}, \quad \hat{S}_- := \hbar\hat{b}^\dagger\hat{a}, \quad \hat{S}_z := \frac{\hbar}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b}), \tag{2.2}$$

$$\hat{S}^2 := \hat{S}_z^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+\right), \quad \hat{N} := \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b} \tag{2.3}$$

を定義する。

[*1] ヒント：$A(x) := e^{i\hat{G}x}\hat{A}e^{-i\hat{G}x}$、$\int \mathrm{d}x\,[\hat{G},\hat{A}(x)] = \int \mathrm{d}x\,[\hat{G},\hat{A}(x)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\lambda)$ として部分積分せよ。

2.1

$\hat{a}, \hat{b}$ の満たす交換関係から、交換関係

$$\left[\hat{S}_z, \hat{S}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{S}_\pm, \quad \left[\hat{S}_+, \hat{S}_-\right] = 2\hbar\hat{S}_z \tag{2.4}$$

を導け。また

$$\hat{S}^2 = \hbar^2\frac{\hat{N}}{2}\left(\frac{\hat{N}}{2}+1\right) \tag{2.5}$$

を示せ。

2.2

$\left|j, m\right\rangle$ ($|m| \leq j$) を

$$\left|j, m\right\rangle := \frac{(\hat{a}^\dagger)^{j+m}(\hat{b}^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\left|0\right\rangle, \tag{2.6}$$

$$\hat{a}\left|0\right\rangle = 0, \quad \hat{b}\left|0\right\rangle = 0 \tag{2.7}$$

で定義する。この状態に関して

$$\hat{S}_z\left|j, m\right\rangle = \hbar m\left|j, m\right\rangle, \quad \hat{S}^2\left|j, m\right\rangle = \hbar^2 j(j+1)\left|j, m\right\rangle, \tag{2.8}$$

$$\hat{S}_\pm\left|j, m\right\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\left|j, m\pm 1\right\rangle, \tag{2.9}$$

を示せ。

Schwinger-boson 表示を用いて、任意の j に対する回転演算子 $e^{-i\frac{\phi}{\hbar}\vec{n}\cdot\hat{S}}$ の行列表現を求めることができる。任意の 3 次元空間回転は適切なオイラー角 α, β, γ を用いて

$$e^{-i\frac{\phi}{\hbar}\vec{n}\cdot\hat{S}} = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{S}_z}e^{-i\frac{\beta}{\hbar}\hat{S}_y}e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{S}_z}, \quad \hat{S}_y := \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i} \tag{2.10}$$

と表せる。行列要素は

$$D^{(j)}_{m'm} := \left\langle j, m'\right|e^{-i\frac{\phi}{\hbar}\vec{n}\cdot\hat{S}}\left|j, m\right\rangle = e^{-im'\alpha}d^{(j)}_{m'm}(\beta)e^{-im\gamma}, \tag{2.11}$$

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) := \left\langle j, m'\right|e^{-i\frac{\beta}{\hbar}\hat{S}_y}\left|j, m\right\rangle \tag{2.12}$$

と書けるから、y 軸周りの回転についての行列要素 $d^{(j)}_{mm'}(\beta)$ のみを計算すれば良い。

2.3

$e^{-i\frac{\beta}{\hbar}\hat{S}_y}\hat{a}^\dagger e^{+i\frac{\beta}{\hbar}\hat{S}_y}$, $e^{-i\frac{\beta}{\hbar}\hat{S}_y}\hat{b}^\dagger e^{+i\frac{\beta}{\hbar}\hat{S}_y}$ を $\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger$ の線形結合で表せ。[*2]

[*2] ヒント：大問 1 で導いた Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いよ。

2.4

前問の結果と (2.6) を用いて $e^{-i\frac{\beta}{\hbar}\hat{S}_y}\left|j,m\right\rangle$ を計算することにより、

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta)=\sum_k(-1)^{k-m+m'}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(j-m'-k)!(k-m+m')!} \tag{2.13}$$

$$\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j-2k-m'+m}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2k+m'-m} \tag{2.14}$$

を示せ。[*3]

3 角運動量と離散対称性

軌道角運動量 $\hat{L}=\hat{x}\times\hat{p}$ に対する、空間反転演算子 $\hat{P}$ と時間反転演算子 $\hat{T}$ の作用は、

$$\hat{P}\hat{L}_j\hat{P}^{-1}=\hat{L}_j,\quad \hat{T}\hat{L}_j\hat{T}^{-1}=-\hat{L}_j \tag{3.1}$$

であった。ここで、空間反転演算子 $\hat{P}$ と時間反転演算子 $\hat{T}$ は

$$\hat{P}\hat{x}\hat{P}^{-1}=-\hat{x},\quad \hat{P}\hat{p}\hat{P}^{-1}=-\hat{p}, \tag{3.2}$$

$$\hat{T}\hat{x}\hat{T}^{-1}=\hat{x},\quad \hat{T}\hat{p}\hat{T}^{-1}=-\hat{p} \tag{3.3}$$

となる内積を保存する演算子として、位相の不定性を除いて定義される。以下では、$\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z$ の同時固有状態を $|L,M\rangle$ と書く。これらは、

$$\hat{L}_\pm|L,M\rangle=\hbar\sqrt{(L\mp M)(L\pm M+1)}\,|L,M\pm1\rangle,\quad \hat{L}_\pm=\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y \tag{3.4}$$

を満たすように位相が調整されているものとする。

3.1

$\hat{P}\left|\theta,\phi\right\rangle=\left|\pi-\theta,\phi+\pi\right\rangle$ を用いて $\hat{P}|L,L\rangle$ を計算せよ。これを用いて、任意の L と M に対して $\hat{P}|L,M\rangle$ を計算せよ。[*4]

3.2

時間反転演算子 $\hat{T}$ の軌道角運動量に対する作用を $\hat{T}|L,L\rangle=|L,-L\rangle$ となるように定める。このとき $\hat{T}|L,M\rangle$ $(M=-L,\dots,L)$ を求めよ。[*5]

[*3] ヒント：二項定理を用いよ。
[*4] ヒント：$\hat{L}_\pm$ と $\hat{P}$ との交換関係を用いよ。
[*5] ヒント：$\hat{L}_\pm$ と $\hat{T}$ との交換関係を用いよ。

次に、スピン部分に対する時間反転演算子 $\hat{T}$ の作用を考えよう。スピンの大きさ $\hat{S}^2$ とスピンの z 成分 $\hat{S}_z$ の同時固有状態を

$$\left|j, m\right\rangle, \quad (j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, \quad m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j) \tag{3.5}$$

とする。

3.3

複素共役演算子 $\hat{K}$ のスピン部分に対する作用を、$\hat{K}\left|j, m\right\rangle = \left|j, m\right\rangle$ として定める。また時間反転演算子 $\hat{T}$ のスピン部分への作用を $\hat{T}\hat{S}_i\hat{T}^{-1} = -\hat{S}_i$ $(i = x, y, z)$ となるように定めることにする。このとき、

$$\hat{T} = \hat{U}_K\hat{K}, \quad \hat{U}_K \coloneqq e^{i\chi}e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{S}_z}e^{-i\frac{\beta}{\hbar}\hat{S}_y}e^{-i\frac{\gamma}{\hbar}\hat{S}_z} \tag{3.6}$$

となるユニタリ演算子 $\hat{U}_K$ を求めよ。[*6]

3.4

$\hat{T}^2\left|j, m\right\rangle$ および $\hat{T}\left|j, m\right\rangle$ を計算せよ。

3.5

ハミルトニアン $\hat{H}$ と $\hat{S}^2$ の同時固有状態 $\left|E, j\right\rangle$ について、$\hat{T}\left|E, j\right\rangle$ が $\left|E, j\right\rangle$ と直交するのはどのようなときか。

[*6] ヒント：$\left|j, m\right\rangle$ に対する $\hat{S}_i$ の行列要素を考えよ。それには $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ を用いると良い。