

量子力学 II 演習問題 9

2019 年 6 月 4 日

1 縮退のない場合の摂動

調和振動子のハミルトニアンに、摂動として $g\hat{x}^4$ を加えたハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + g\hat{x}^4 \quad (1.1)$$

を考える。 $g = 0$ のときのエネルギー固有値と固有状態を $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), |n\rangle$ とする。

1.1

E_n と $|n\rangle$ に対する摂動の 1 次の補正を求めよ。

1.2

E_n と $|n\rangle$ に対する摂動の 2 次の補正を求めよ。

1.3

$g > 0$ のとき、摂動の高次の項を取り入れていくと E_n は発散することが知られているが¹、このような場合にも（適切なパラメータと摂動次数の範囲内で）摂動論は適用可能である。 $m = \hbar = \omega = 1, g = 0.1$ の場合のハミルトニアン (1.1) の基底状態のエネルギーを 2 次の摂動まで計算し、厳密な結果 $E_0 = 0.559$ ² と比較せよ。

¹ Bender, Carl M., and Tai Tsun Wu. "Anharmonic oscillator. II. A study of perturbation theory in large order." *Physical Review D* 7.6 (1973): 1620.

² Liverts, E. Z., V. B. Mandelzweig, and F. Tabakin. "Analytic calculation of energies and wave functions of the quartic and pure quartic oscillators." *Journal of mathematical physics* 47.6 (2006):

2 ファン・デル・ワールスカ

遠く離れた2つの水素原子間のエネルギーを摂動により求める。非摂動ハミルトニアン \hat{H}_0 と摂動ポテンシャル \hat{V} は

$$\hat{H}_0 = \left(\frac{\hat{p}_1^2}{2m} - \frac{e^2}{r_1} \right) + \left(\frac{\hat{p}_2^2}{2m} - \frac{e^2}{r_2} \right), \quad (2.1)$$

$$\hat{V} = \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{|\vec{r} + \vec{r}_2 - \vec{r}_1|} - \frac{e^2}{|\vec{r} + \vec{r}_2|} - \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad (2.2)$$

である。ここで、 \vec{r}_1 は1番目の水素原子における陽子から電子へのベクトルであ、 \vec{r}_2 も同様である。また、 \vec{r} は1番目の水素原子の陽子から2番目の水素原子の陽子へのベクトルであり、 $r \gg r_1, r_2$ とする。

2.1

\hat{H}_0 の基底状態 $|100; 100\rangle$ に対して、 $\langle 100; 100 | \hat{V} | 100; 100 \rangle = 0$ を示せ。ここで、ルジャンドル関数の母関数に対する式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (2.3)$$

を用いて \hat{V} を $1/r$ のべきで展開すると良い。また、 $P_0(x) = 1, \int_{-1}^1 dx P_n(x) \propto \delta_{0n}$ を用いて良い。

2.2

\hat{H}_0 の基底状態 $|100; 100\rangle$ に対するエネルギー固有値への、0でない最低次の摂動を求めよ。特に、その r 依存性と符号に注意せよ。

3 縮退のある場合の摂動

電子と陽電子の束縛状態であるポジトロニウムに z 軸に沿った均一な静磁場 B が掛かっている場合のハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad \hat{H}_0 = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \quad \hat{V} = \left(\frac{eB}{m_e c} \right) (\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}) \quad (3.1)$$

である。ここで、 \vec{S}_1 は電子のスピンを \vec{S}_2 は陽電子のスピンを表す。

3.1

\hat{H}_0 のエネルギー固有値と固有状態を全て求めよ。

3.2

\hat{V} を摂動と見なしたとき、エネルギー固有値と固有状態を 1 次の摂動で求めよ。縮退は解けるか？縮退がある場合、高次の摂動を取り入れればこの縮退は解けるだろうか？理由とともに答えよ。

3.3

$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ のエネルギー固有値と固有状態を厳密に求め、上記の結果と比較せよ。

3.4

z 軸方向の角運動量が 0 である 2 つの状態の間に遷移を起こさせたい場合、新たに加える磁場はどの向きにかければ良いか。磁場の振動数は適切に選ぶものとする。。