2010 Dec. 24

量子力学 I (上田正仁) Homework.4

1 次元空間上の自由電子の運動を考察する. ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \tag{1}$$

で与えられる. 時刻 $t=0$ での状態ベクトル $|\psi\rangle$ は基底 $\{|x\rangle\}$ で展開係数

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + i\frac{q}{\hbar}x\right) \tag{2}$$

で与えられるものとする. この波束は $x=0$ の周辺に幅 σ 程度広がっている.

問題 1　状態ベクトル $|\psi\rangle$ が規格化されている, すなわち

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\langle x|\psi\rangle|^2 = 1 \tag{3}$$

を満たすことを示せ. また, $\hat{x}, \hat{p}$ の期待値 $\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle, \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle$ を計算せよ.

問題 2　初期状態ベクトル $|\psi\rangle$ の基底 $\{|p\rangle\}$ での展開係数 $\langle p|\psi\rangle$ を求めよ. なお, $\langle x|p\rangle = \langle p|x\rangle^* = e^{ipx/\hbar}$ を用いてよい.

問題 3　シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{4}$$

を解き, 時刻 t での状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ を基底 $\{|p\rangle\}$ で表示せよ, すなわち展開係数 $\langle p|\psi(t)\rangle$ を求めよ.

問題 4　時刻 t での運動量の揺らぎ

$$\Delta p(t) \equiv \sqrt{\langle\psi(t)|\hat{p}^2|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|\hat{p}|\psi(t)\rangle^2} \tag{5}$$

を計算せよ.

問題 5　時刻 t での位置の揺らぎ

$$\Delta x(t) \equiv \sqrt{\langle\psi(t)|\hat{x}^2|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle^2} \tag{6}$$

を計算せよ.

問題 6　ハイゼンベルクの不確定性関係が任意の時刻で成立すること ($\Delta x(t)\Delta p(t) \geq \hbar/2$) を示し, 状態が最小不確定状態になる時刻を求めよ.

Key Point　自由粒子の系では運動量を対角化する基底はハミルトニアンも対角化するため, 運動量空間での波束は広がらない. 一方で座標空間での波束は時間と共に広がり, 系の不確定性は大きくなっていく.