2011 Jan. 7

量子力学 I (上田正仁) Homework.5

調和振動子の量子力学的な振る舞いを考える．ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \tag{1}$$

で与えられる．

**問題 1** 基底状態の波動関数 $\phi_0(x) = \langle x|\phi_0\rangle$ を，規格化も含めて書き下せ．なお，必要ならば $\phi_0(x)$ がガウス型であること ( $\phi_0(x) \propto \exp(-Cx^2)$ ) および基底エネルギーが $\hbar\omega/2$ であることを使ってよい．

**問題 2** 基底状態 $|\phi_0\rangle$ の位置と運動量の不確定性，$(\Delta x)^2 \equiv \langle\phi_0|\hat{x}^2|\phi_0\rangle - \langle\phi_0|\hat{x}|\phi_0\rangle^2$ および $(\Delta p)^2 \equiv \langle\phi_0|\hat{p}^2|\phi_0\rangle - \langle\phi_0|\hat{p}|\phi_0\rangle^2$ を求めよ．

**問題 3** 調和振動子の基底状態が最小不確定性状態であることを確かめよ．また運動量の不確定性由来のエネルギー $(\Delta p)^2/2m$ が基底エネルギーのちょうど半分であることを確かめよ．

**問題 4** $t < 0$ で調和振動子の基底状態にいたとする．$t = 0$ で突然調和ポテンシャルを消して $V = 0$ としたとする．そのあとの時刻 $t > 0$ での波動関数 $\phi(x,t) = \langle x|\phi(t)\rangle$ を時間発展演算子

$$U(t) = \exp\Big(-i\frac{\hat{p}^2}{2m\hbar}t\Big) \tag{2}$$

を $\phi_0(x)$ に作用させることにより求めよ．(Fourier 変換を利用すると良い)

**問題 5** 時刻が十分経過した時の波動関数が広がっていく速さが初期状態の運動量の不確定性と一致していることを確かめよ．

**問題 6** 時刻 $t$ での運動エネルギーの期待値 $\langle\phi(t)|\frac{\hat{p}^2}{2m}|\phi(t)\rangle$ を実際に上で求めた波動関数 $\phi(x,t)$ を代入して計算して求め，任意の時間についてこれが初期状態の調和振動子の零点エネルギーの半分に相当していることを確かめよ．

**Key Point** 基底状態も有限のエネルギーをもち，これを**零点振動**，または**零点エネルギー**と呼び，このため運動量の幅 $\Delta p$ も有限に存在する．上記の例では，古典力学ならば粒子は調和振動子の中心に静止したままだが波動関数は零点エネルギーに含まれる運動エネルギーの揺らぎ (今回はちょうど零点エネルギーの半分に相当) により広がる．今回の具体例はこの零点振動，すなわち位置と運動量の不確定性を明白に表している．